

7

Statistiek en beslissingen

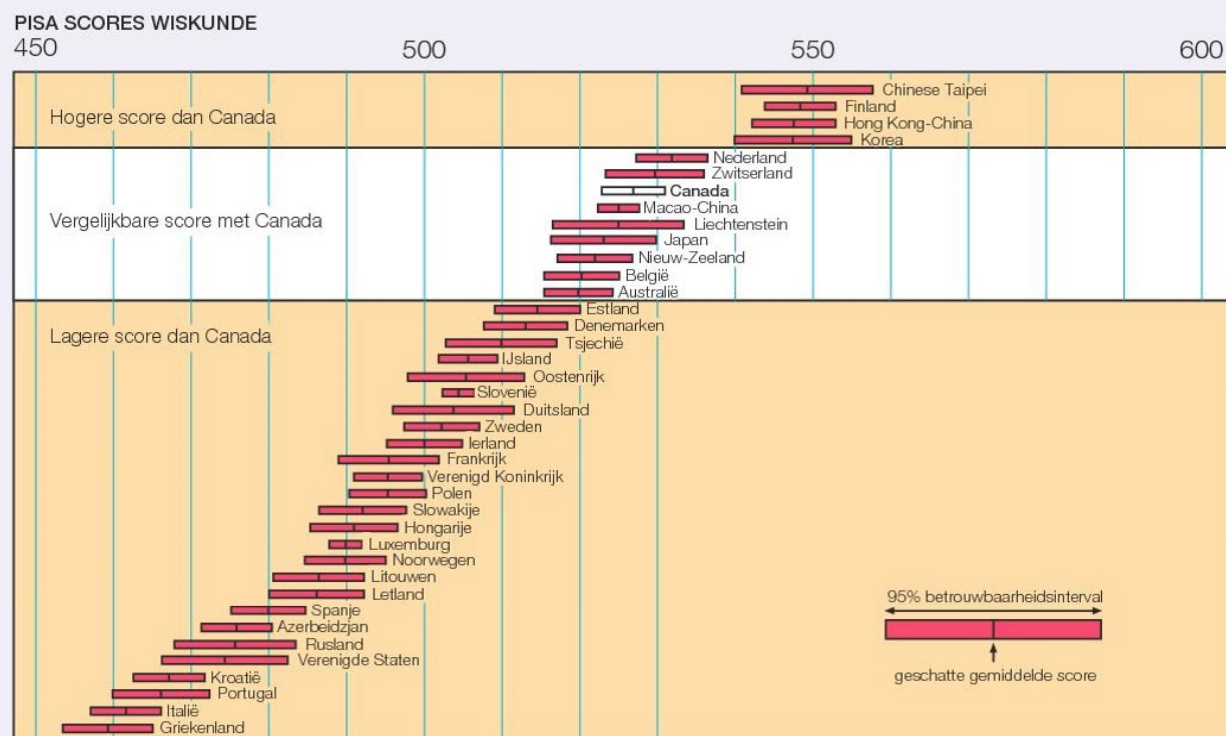
Wat leer je?

- Verschillende soorten verdelingen herkennen en vergelijken.
- Wat de normale verdeling is en welke vuistregels erbij horen.
- Rekenen aan de steekproevenverdelingen bij een gemiddelde of proportie
- Wat een betrouwbaarheidsinterval bij een gemiddelde of proportie is.
- Wanneer je welk type betrouwbaarheidsinterval gebruikt.
- Betrouwbaarheidsintervallen toepassen.



Beginopdracht PISA Canada

Het Programme for International Student Assessment (PISA) is een groot internationaal vergelijkend onderzoek onder scholieren naar hun kennis en vaardigheid op het gebied van taal, wiskunde en wetenschap. Om de drie jaar wordt in een groot aantal landen een representatieve steekproef genomen van 15-jarigen. Bij het onderzoek wordt gebruik gemaakt van een zogenaamde PISA-score die aan een hoger beheersingsniveau een hogere score toekent.



In de figuur zie je de PISA-scores voor wiskunde, gezien vanuit het perspectief van Canada. De gemiddelde score voor wiskunde van scholieren in de steekproef van Ierland was 500.

- Waarom is het interval [495, 505] gebruikt om de score voor alle Ierse 15-jarigen scholieren (de populatie) weer te geven?
- Je ziet dat niet alle intervallen even breed zijn. Geef van de volgende factoren aan of ze van invloed zijn op de breedte van de intervallen: het gemiddelde, de standaardafwijking, de steekproefomvang.
- In het diagram staat een aantal landen met een score vergelijkbaar met die van Canada.

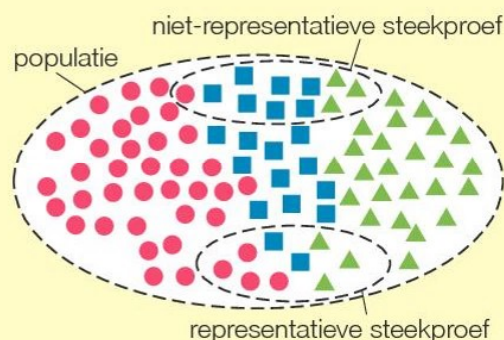
Onderzoek hoe deze groep tot stand is gekomen.

- Nederland en België scoorden vergelijkbaar met Canada. Wil dat zeggen dat de scores van Nederland en België ook vergelijkbaar waren? Licht toe.

Voorkennis Steekproeven, centrummaten en spreidingsmaten

Theorie A Proporties bij steekproeven

De totale groep waarop een onderzoek zich richt heet de populatie. Het onderzoeken van de hele populatie lukt in veel gevallen niet, bijvoorbeeld omdat het veel werk is. Het deel van de populatie dat je daadwerkelijk onderzoekt, heet de steekproef. Het is belangrijk dat een steekproef een goede afspiegeling is van de populatie. Een steekproef heet dan representatief.



figuur 7.1

De populatieproportie is het deel van de populatie dat een bepaalde eigenschap heeft. De steekproefproportie is het deel van de steekproef dat deze eigenschap heeft. Door een representatieve steekproef te gebruiken zal de steekproefproportie meestal dichtbij de populatieproportie liggen.

De populatieproportie p van een kenmerk in de populatie is

$$p = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de populatie}}{\text{totaal aantal elementen in de populatie}}.$$

De steekproefproportie $\hat{p}$ van een kenmerk in de steekproef is

$$\hat{p} = \frac{\text{aantal elementen met het kenmerk in de steekproef}}{\text{totaal aantal elementen in de steekproef}}.$$

Soms wordt het dakje op de p bij de steekproefproportie weggelaten. Het is dan belangrijk dat je zelf goed kunt inschatten of je met p of $\hat{p}$ te maken hebt.

- 1** De dagproductie literpakken vruchtensap in een fabriek is 20 000. Hiervan hebben 165 pakken te weinig inhoud. In een steekproef worden 250 pakken van de dagproductie onderzocht op de inhoud. Hiervan blijken er 2 te weinig inhoud te hebben. Bereken de populatieproportie en de steekproefproportie van literpakken vruchtensap met te weinig inhoud.
- 2** Van de sporters die deelnemen aan een groot sportevenement is de populatieproportie van het kenmerk 'de sporter heeft bloedgroep B' gelijk aan 0,225. Het blijkt namelijk dat 639 sporters bloedgroep B hebben. Bij een steekproef van 115 sporters tijdens dit evenement blijkt de steekproefproportie bij het kenmerk 'heeft bloedgroep B' 0,235 te zijn. Bereken het totale aantal sporters op dit sportevenement en het aantal sporters met bloedgroep B in de steekproef.

Theorie B Centrummaten en spreidingsmaten

Het geheel van alle data is vaak onoverzichtelijk. Om een beeld te krijgen helpt een tabel of diagram. Je kunt ook centrum- en spreidingsmaten berekenen.

Een centrummaat kwantificeert waar het centrum van de data ligt. Spreidingsmaten kwantificeren hoe sterk de data verspreid is.

Voorbeelden van centrummaten zijn gemiddelde, modus en mediaan.

Voorbeelden van spreidingsmaten zijn spreidingsbreedte, interkwartielafstand en standaardafwijking.

Kwantificeren betekent uitdrukken in een getal.

Voor de standaardafwijking wordt het symbool σ , spreek uit sigma, gebruikt.

- 3** Voor een practicum biologie moet Rianne slakken tellen in een volkstuintje. Ze verdeelt het tuintje in stukken van één vierkante meter. Het resultaat staat in de tabel.

SLAKKEN IN VOLKSTUINTJE

aantal per m ²	2	3	4	5	6	7
frequentie	18	16	5	7	3	2

- a** Hoeveel m² heeft Rianne onderzocht?
b Hoeveel slakken heeft Rianne in totaal geteld?

Bij het teruglezen van haar notities ontdekt Rianne dat één van de metingen van 7 slakken per m² eigenlijk 1 slak per m² had moeten zijn.

- c** Verandert hierdoor het gemiddelde? Hoe zit dat bij de modus en de mediaan?

Rianne onderzoekt nog één vierkante meter extra en ontdekt acht slakken.

- d** Zal de standaardafwijking hierdoor toenemen? Licht toe.

De standaardafwijking σ geeft een indruk van de gemiddelde afwijking van de waarnemingsgetallen ten opzichte van het gemiddelde.

- 4** Zie de boxplot hieronder.



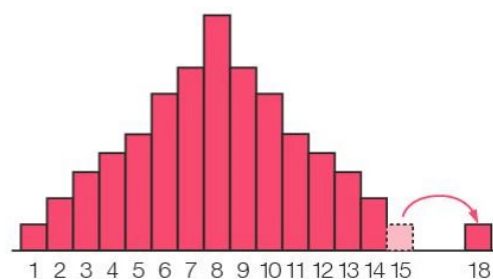
figuur 7.2

- a** Welke centrum- en spreidingsmaten kun je aflezen in deze boxplot?
b Hoeveel procent van de waarnemingsgetallen ligt tussen 2 en 4?

7.1 Statistische verdelingen

01
☐◎*

In figuur 7.3 zie je een histogram waarbij het staafje bij 15 wordt verplaatst naar 18. Welk effect heeft deze verandering op de modus, de mediaan en het gemiddelde? Kies uit: neemt toe, blijft gelijk of neemt af. Licht je antwoorden toe.



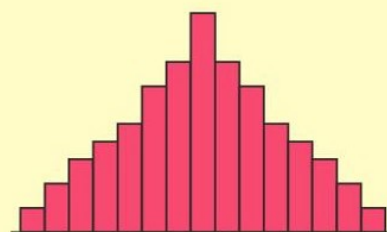
figuur 7.3

Theorie A Standaardverdelingen

In een histogram is de verdeling van de data goed te zien. We onderscheiden een aantal standaardverdelingen.

Een **symmetrische verdeling**.

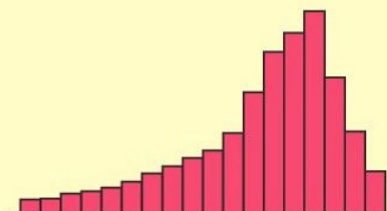
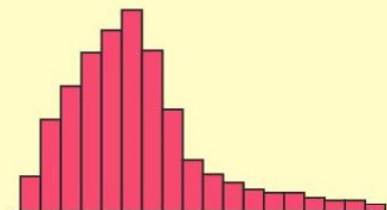
Het gemiddelde, de modus en de mediaan zijn gelijk.



Een **scheve verdeling**.

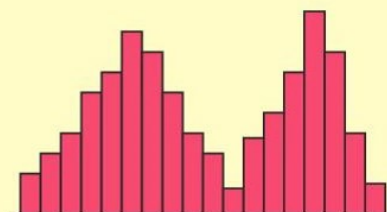
Hierin is de data aan één kant meer verspreid. Dit heet ook wel de **staart van de verdeling**. Bij een **rechts-scheve verdeling** ligt de staart rechts en bij een **links-scheve verdeling** links. In het algemeen ligt het gemiddelde meer richting de staart van de verdeling dan de mediaan.

De mediaan geeft hierdoor een beter beeld van het centrum van de verdeling dan het gemiddelde.



Een **meertoppige verdeling**.

Hierbij zijn meerdere toppen binnen de data te onderscheiden. De standaardafwijking is relatief groot.



Een **uniforme verdeling**.

Elk waarnemingsgetal heeft dezelfde frequentie.

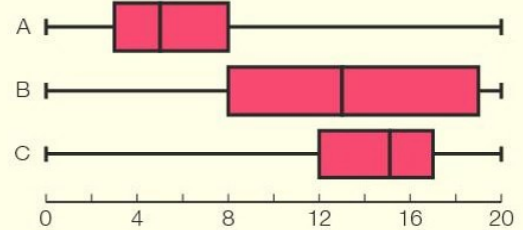
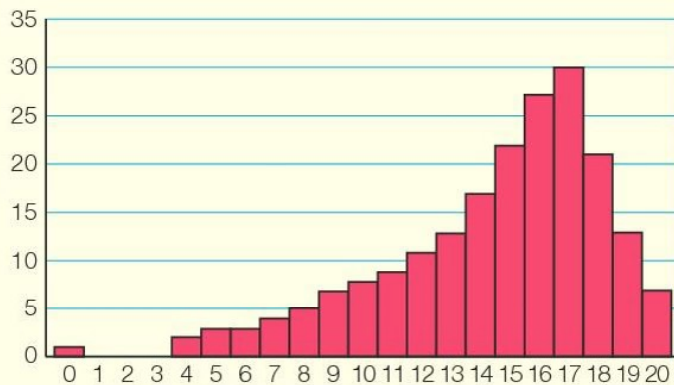


De links-scheve verdeling in het voorbeeld op de volgende bladzijde bevat een uitzonderlijk laag waarnemingsgetal.

Een waarnemingsgetal dat opvallend afwijkt van de rest van de verdeling wordt een **uitschieter** of **uitbijter** genoemd.

Voorbeeld

Zie figuur 7.4. Eén van de boxplots hoort bij het histogram. Onderzoek welke boxplot dat is.



figuur 7.4

Uitwerking

Boxplot A kan niet kloppen, omdat in het histogram tussen 8 en 20 meer dan 25% van de data ligt.

Boxplot B kan niet kloppen, omdat in het histogram tussen 19 en 20 minder dan 25% van de data ligt.

Dus boxplot C hoort bij het histogram.

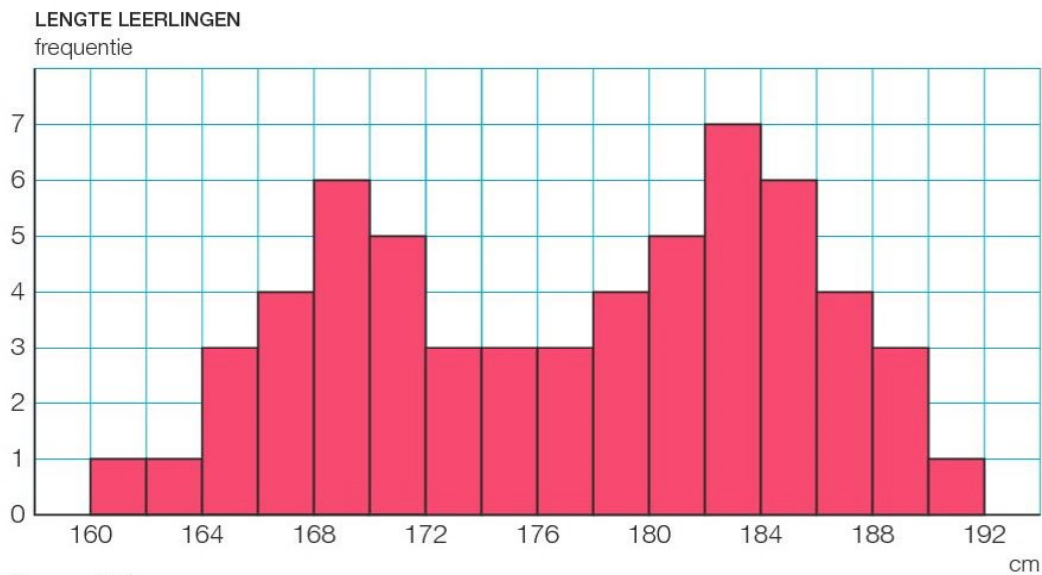


2 Noem bij elk van onderstaande situaties een mogelijke verdeling.

- a Het IQ van Nederlandse 20-jarigen.
- b Het jaarinkomen van Nederlandse werknemers.
- c Het gewicht van sinaasappels bij een kraam op de markt.
- d De zwangerschapsduur van Nederlandse vrouwen.
- e Het gewicht van volwassen zeeleeuwen.

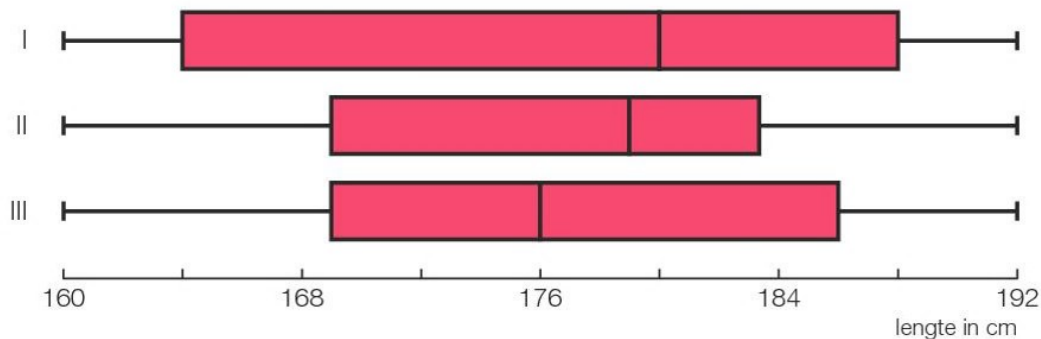


Zie figuur 7.5 met de verdeling van de lengten van 59 leerlingen.
 De eerste klasse is $[160, 162)$.



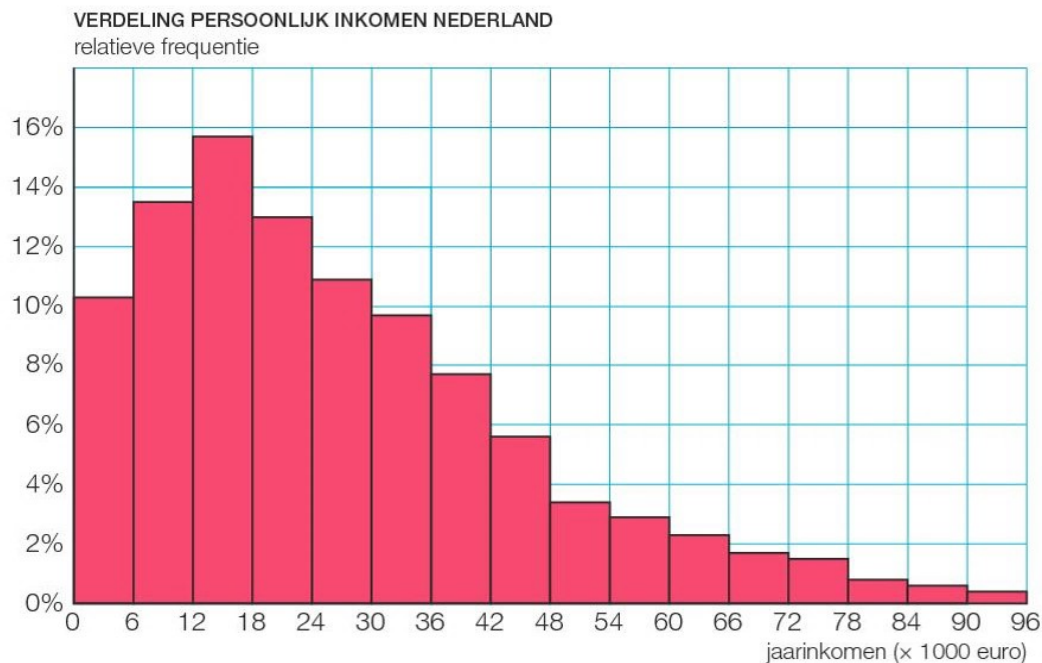
figuur 7.5

- Er zijn twee toppen in het histogram. Geef hiervoor een mogelijke verklaring.
- Geef de modale klasse.
- Volgens Bram is het gemiddelde 176 cm en de standaardafwijking 8 cm.
 Zou dat kunnen kloppen? Licht toe.
- In de figuur hieronder zie je drie boxplots.
 Welke van de drie past het beste bij figuur 7.5? Licht toe.



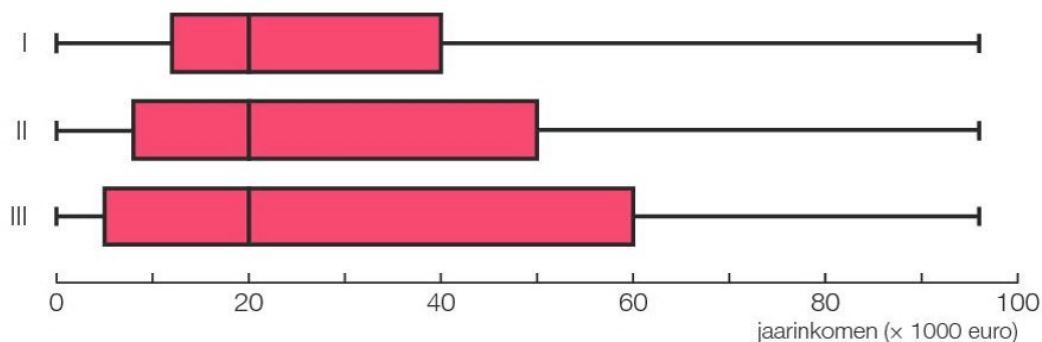
figuur 7.6

In figuur 7.7 zie je een gedeelte van de verdeling van het persoonlijk inkomen in Nederland.



figuur 7.7

- In de krant staat dat het doorsnee inkomen ongeveer 26 700 euro is. Onderzoek met behulp van de figuur of dit de mediaan of het gemiddelde is.
- Een journalist wil met het gemiddelde of de mediaan een beeld geven van wat in Nederland een gangbaar inkomen is. Welke van de twee centrummaten geeft een beter beeld? Licht toe.
- Joost beweert dat als iedereen hetzelfde inkomen zou hebben, alle staven in figuur 7.7 even hoog zouden zijn. Dus dat je in dat geval met een uniforme verdeling te maken hebt. Heeft Joost gelijk? Licht toe.
- In de figuur hieronder zie je drie boxplots. Welke van de drie past het beste bij figuur 7.7? Licht toe.



figuur 7.8

A5
☐⊙

In figuur 7.9 zijn vier boxplots getekend. Deze horen bij de verdelingen I, II, III en IV.

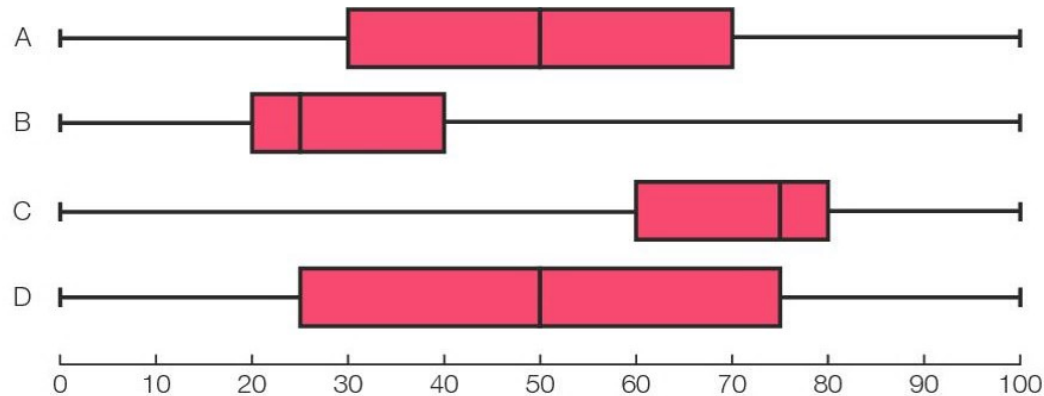
Welke boxplot hoort bij welke verdeling?

I De verdeling is uniform.

II De verdeling is tweetoppig, de eerste top zit bij 30 en de tweede top bij 70.

III De verdeling is rechts-scheef.

IV De verdeling is links-scheef.



figuur 7.9

E6
*

Lees het informatief.

INFORMATIEF

Uitschieters

Waarnemingsgetallen die opvallend afwijken van de rest van de verdeling worden uitschieters of uitbijters genoemd. In het Engels spreekt men van *outliers*. Soms worden uitschieters in de onderzoeksresultaten meegenomen en soms worden ze juist weggelaten, omdat ze bijvoorbeeld het gevolg zijn van een meetfout.

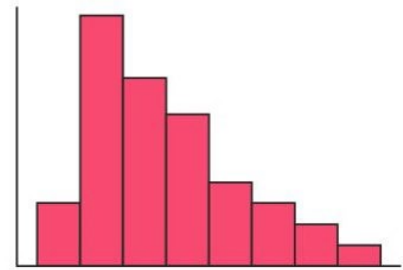
Er bestaan verschillende methoden, om te bepalen wanneer een waarnemingsgetal opvallend afwijkt. Een veelgebruikte afspraak is:

Een uitschieter is een waarnemingsgetal dat meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste of boven het derde kwartiel ligt.

Bij het analyseren van de data moet een onderzoeker beslissen hoe om te gaan met uitschieters. Bij een boxplot worden uitschieters soms als losse punten buiten de boxplot aangegeven.

Onderzoek of in het voorbeeld op bladzijde 90 volgens bovenstaande afspraak inderdaad een uitschieter voorkwam.

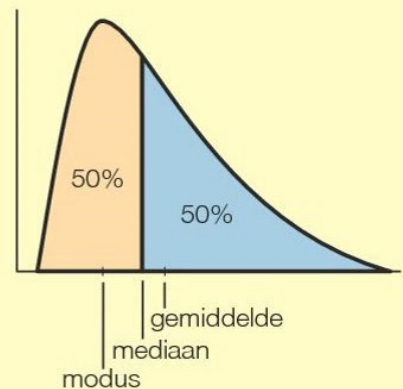
Zie het histogram in figuur 7.10.
Is de modus groter of kleiner dan de mediaan? Licht toe.



figuur 7.10

Theorie B Verdelingskrommen

Een histogram geeft een goed beeld van een frequentieverdeling. Maar in plaats van een histogram te tekenen kun je ook een globale grafiek van de verdeling schetsen. Zo'n grafiek heet een **verdelingskromme**. Zo hoort bij het histogram in figuur 7.10 de verdelingskromme hiernaast. Ook hier ligt de modus bij de top. De verticale lijn bij de mediaan verdeelt de oppervlakte onder de kromme in twee gebieden met gelijke oppervlakte. De mediaan is hier dus groter dan de modus. Omdat de verdeling rechts-scheef is, is het gemiddelde groter dan de mediaan.



figuur 7.11

Ook een **cumulatieve verdelingskromme** geeft een beeld van een verdeling. Is een verdelingskromme gegeven dan kun je daarbij een schets maken van de cumulatieve verdelingskromme en andersom.

Voorbeeld

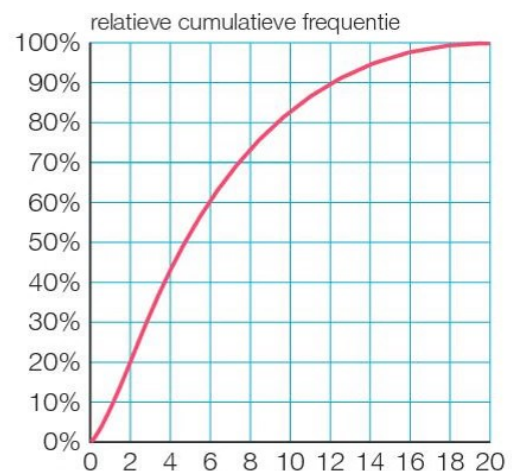
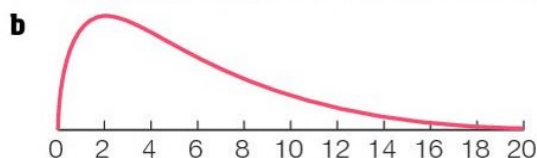
Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in figuur 7.12.

- Licht toe dat je te maken hebt met een rechts-scheve verdeling met een top bij 2.
- Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem de horizontale as van 0 tot 20.

Uitwerking

- In het begin is de kromme erg steil, dus zijn daar veel waarnemingsgetallen. Op het eind is de kromme minder steil, dus daar zijn weinig waarnemingsgetallen. Dus het is een rechts-scheve verdeling.

De modus is 2, want de kromme is daar het steilst.



figuur 7.12

R8

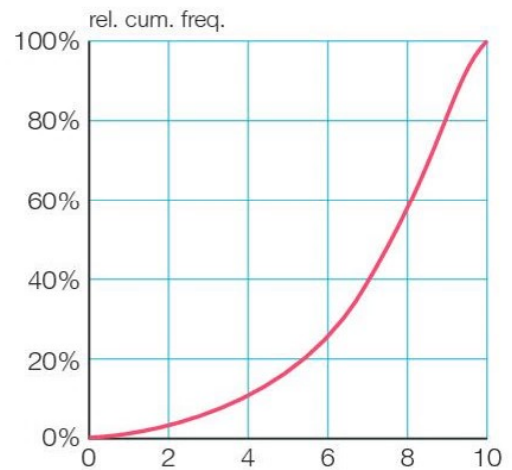

Zie het voorbeeld.

- a** Geef een schatting van de mediaan met behulp van de relatieve cumulatieve verdelingskromme.
- b** Licht toe dat bij het steilste stuk van de relatieve cumulatieve verdelingskromme de modus hoort.

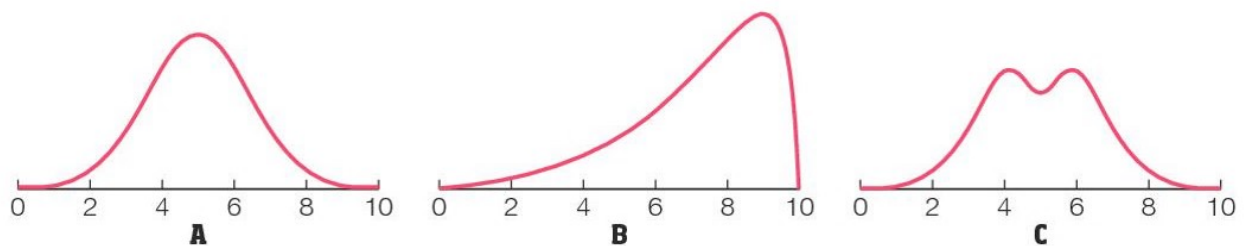
9


Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in figuur 7.13.

Welke van de onderstaande verdelingskrommen hoort hierbij? Licht toe.



figuur 7.13

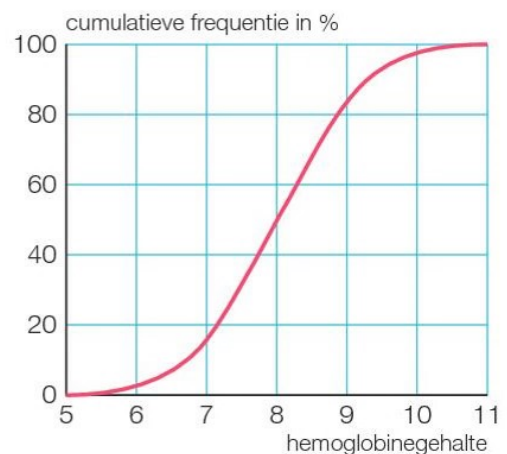


figuur 7.14

10


Bij een medisch onderzoek is het hemoglobinegehalte van een grote groep Nederlandse mannen gemeten. Zie de relatieve cumulatieve verdelingskromme in figuur 7.15.

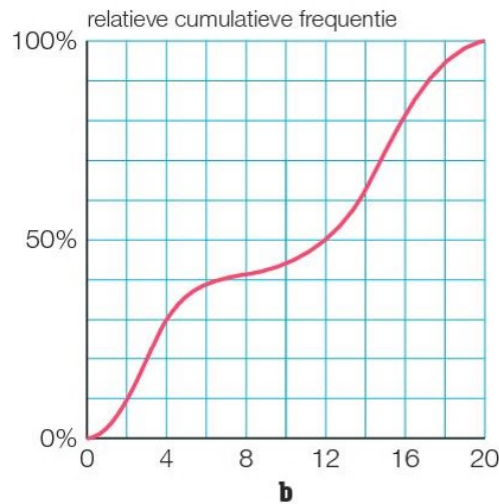
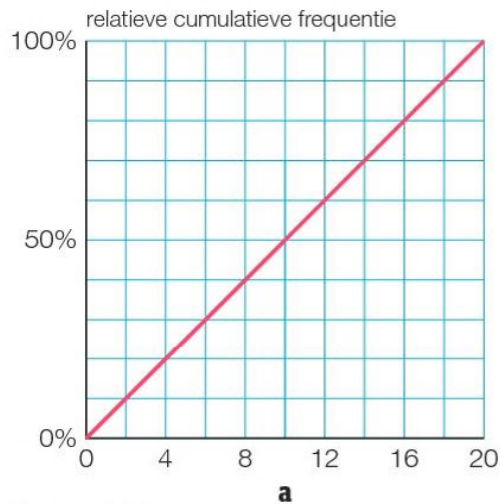
- a** Met welke soort verdeling heb je te maken? Licht toe.
- b** Schets de bijbehorende verdelingskromme. Neem op de horizontale as de getallen 5, 6, 7, 8, 9, 10 en 11.
- c** Schat het gemiddeld hemoglobinegehalte van de onderzochte groep.



figuur 7.15



11 Zie de relatieve cumulatieve verdelingskrommen hieronder. Met welke soorten verdelingen heb je te maken? Licht toe.

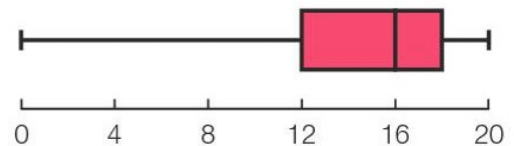


figuur 7.16



12 Gegeven is de boxplot in figuur 7.17.

- a** Met welke soort verdeling heb je te maken? Licht toe.
- b** Hoe ligt het gemiddelde ten opzichte van de mediaan?

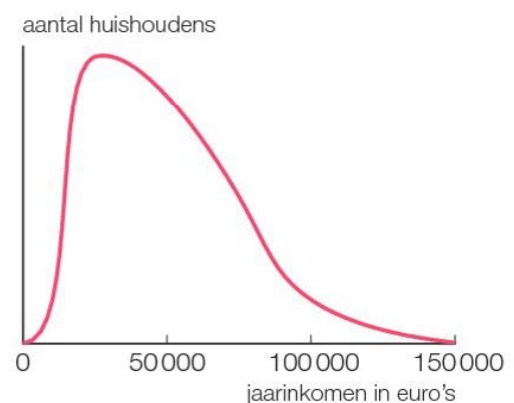


figuur 7.17



A13 De verdelingskromme in figuur 7.18 geeft informatie over de verdeling van de jaarinkomens van huishoudens van een groot aantal gemeentes.

- a** Zet op volgorde van klein naar groot: mediaan, modus en gemiddelde. Licht toe.
- b** Schets de relatieve cumulatieve verdelingskromme. Neem op de horizontale as de getallen 0, 50 000, 100 000 en 150 000.



figuur 7.18

GESCHIEDENIS

Karl Pearson (1857-1936)

Pearson was een wetenschapper die in Londen werd geboren. Hij studeerde wiskunde op King's College in Cambridge en werkte op verschillende Duitse universiteiten. Bij zijn geboorte kreeg hij de naam Carl, die hij in Duitsland besloot te veranderen naar Karl. Karl Pearson leverde een aantal grote bijdragen aan het onderwerp statistiek, zoals bijvoorbeeld de introductie van het histogram en een manier om de correlatie (samenhang) van twee variabelen te kwantificeren: de Pearson correlatiecoëfficiënt. Ook komt de term standaardafwijking van Pearson.

In 1882 werd zijn boek *The Grammar of Science* gepubliceerd, dat van invloed was op Einstein bij het ontwikkelen van diens relativiteitstheorieën.

E14

*

De beroemde statisticus Karl Pearson (zie het kader op de vorige bladzijde) gebruikte de formule $s = \frac{\text{gemiddelde} - \text{modus}}{\text{standaardafwijking}}$ om de scheefheid van een verdeling te kwantificeren. Uit de waarde van s blijkt of de verdeling links-scheef of rechts-scheef is, en ook hoe sterk deze afwijkt van een symmetrische verdeling.

a Is bij een rechts-scheve verdeling s positief of negatief? Licht toe.

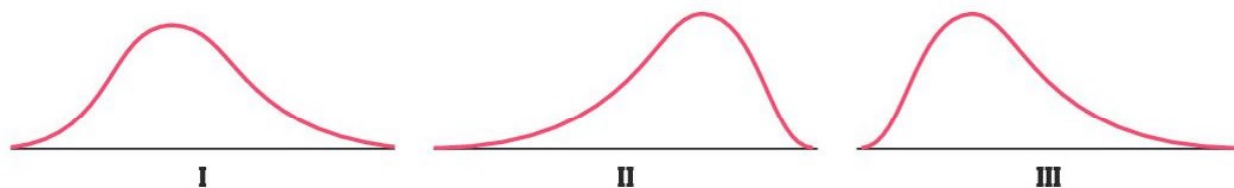
Bij een voetbaltoernooi dat twee dagen duurt, wordt bijgehouden hoeveel doelpunten per wedstrijd worden gescoord. Zie de tabel.

doelpunten	0	1	2	3	4	5	6
frequentie dag 1	4	5	3	2	2	1	1
frequentie dag 2	2	3	5	4	2	1	0

De standaardafwijking is 1,76 op de eerste dag en 1,35 op de tweede dag.

- b** Teken voor beide dagen een histogram. Op welke dag wijkt de verdeling het meest af van een symmetrische verdeling?
- c** Bereken s voor beide dagen. Rond af op twee decimalen. Hoe zie je aan s hoe sterk de verdeling afwijkt van een symmetrische verdeling?

Hieronder zijn drie verdelingskrommen getekend.



figuur 7.19

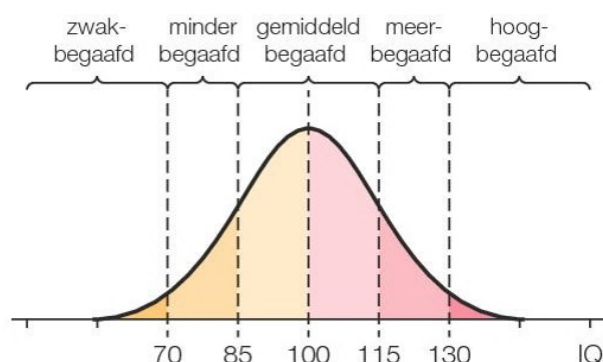
- d** Bij welke kromme hoort een negatieve waarde van s ? En bij welke kromme hoort de grootste positieve waarde van s ?

015

□ ⊗ *

Het intelligentiequotiënt (IQ) is een maat voor intelligentie. Het IQ heeft een symmetrische verdeling zoals in figuur 7.20. Van de 17,3 miljoen Nederlanders zijn er 11,8 miljoen gemiddeld begaafd.

- a** Welk percentage Nederlanders is gemiddeld begaafd?
- b** Er zijn in Nederland 2,3 miljoen 'meer-begaafden'. Welk percentage Nederlanders is hoogbegaafd?



figuur 7.20

Theorie C De normale verdeling

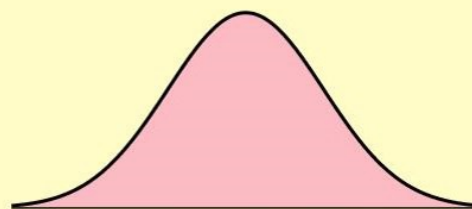
In figuur 7.21 is de verdelingskromme bij een bijzondere symmetrische verdeling getekend. Deze klokvormige kromme heet de **normaalkromme** en hoort bij de **normale verdeling**.

Normale verdelingen komen veel voor in het dagelijks leven.

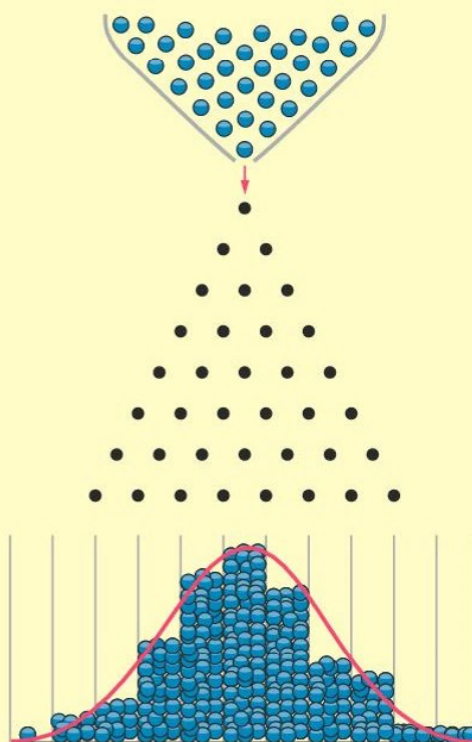
In veel situaties waarbij afwijkingen van het gemiddelde willekeurig optreden is het resultaat een normale verdeling. Dit verrassende resultaat kun je demonstreren met het *bord van Galton*, waarbij een groot aantal balletjes op onderliggende pinnetjes valt en steeds willekeurig naar links of rechts stuitert. Elk balletje neemt een onvoorspelbare route, maar het resultaat van alle balletjes samen is toch steeds goed te voorspellen met de normale verdeling.

De normale verdeling past bijvoorbeeld goed bij de verdeling van

- de lengte van Nederlandse 20-jarige mannen
- het aantal branduren van een bepaald type lamp
- de gewichten van kilopakken koffie.



figuur 7.21 De normaalkromme



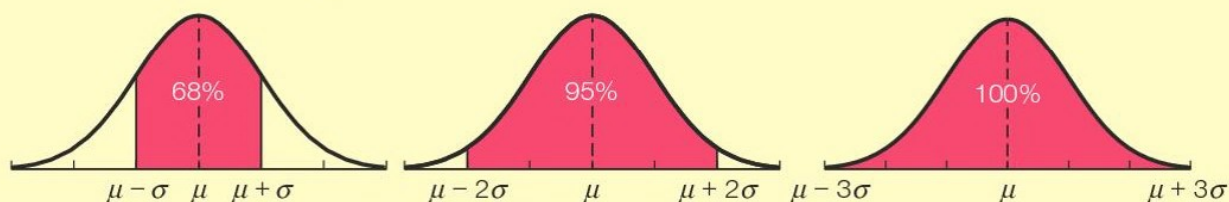
figuur 7.22

Bij de normale verdeling wordt het gemiddelde aangegeven met de Griekse letter μ . Spreek μ uit als mu. Voor de standaardafwijking gebruiken we de Griekse letter σ .

De totale oppervlakte onder de kromme is 100%.

Bij de normale verdeling ligt ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen minder dan σ van μ af. En ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt minder dan 2σ van μ af. En bijna 100% ligt minder dan 3σ van μ af.

gemiddelde μ
standaardafwijking σ

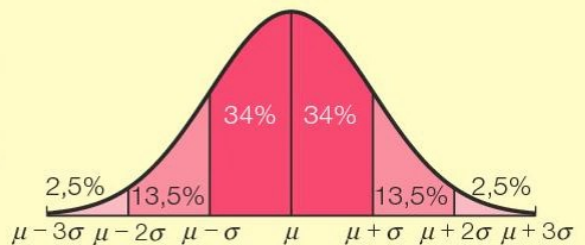


figuur 7.23

Uit de symmetrie van de normaalkromme volgen de percentages in de verschillende gebieden in figuur 7.24. Onthoud deze percentages.

Vuistregels bij de normale verdeling

- ongeveer 68% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- ongeveer 95% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$
- bijna 100% van de waarnemingsgetallen ligt tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$



figuur 7.24

Bij berekeningen met de vuistregels mag je de woorden ongeveer en bijna weglaten.

Voorbeeld

Van 600 baby's is gegeven dat het geboortegewicht normaal verdeeld is. Het gemiddelde $\mu = 3500$ gram en de standaardafwijking $\sigma = 450$ gram.

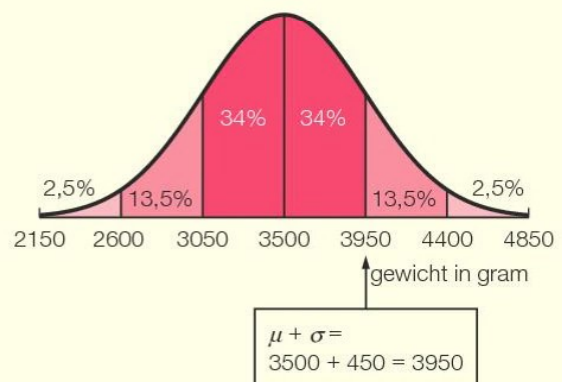
- Van hoeveel procent van de baby's is het geboortegewicht meer dan 4400 gram?
- Hoeveel baby's hebben een geboortegewicht tussen 2600 gram en 3950 gram?
- Van hoeveel baby's wijkt het geboortegewicht meer dan 900 gram van het gemiddelde af?

Aanpak

Schets een normaalkromme en zet getallen bij de horizontale as.

Uitwerking

- Zie de schets. Dus 2,5%.
- $13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$, dus $0,815 \cdot 600 = 489$ baby's.
- 900 gram is 2σ , dus van $2,5\% + 2,5\% = 5\%$ en dat zijn $0,05 \cdot 600 = 30$ baby's.



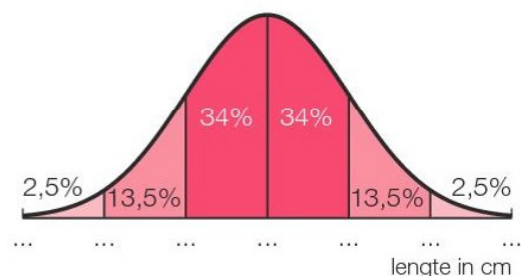
16

Van een groep volwassen vrouwen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 170$ cm en $\sigma = 5$ cm.

- Neem figuur 7.25 over en zet onder de horizontale as de juiste getallen.

Van hoeveel procent van de vrouwen is de lengte

- tussen 165 en 180 cm
- minder dan 160 cm
- meer dan 175 cm
- tussen 160 en 170 cm?



figuur 7.25

17
□ ⊙ *

Van 200 konijnen is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 2,1 kg en een standaardafwijking van 0,3 kg.

- a Hoeveel procent van de konijnen is zwaarder dan 2,7 kg?
- b Wat is de proportie konijnen met een gewicht tussen 1,5 en 2,4 kg?
- c Bereken het aantal konijnen dat lichter is dan 1,8 kg.
- d Wat weet je van de gewichten van de vijf lichtste konijnen van deze groep?

A18
□ ⊙ *

Van 5000 appels is het gewicht normaal verdeeld met een gemiddelde van 180 gram en een standaardafwijking van 11 gram.

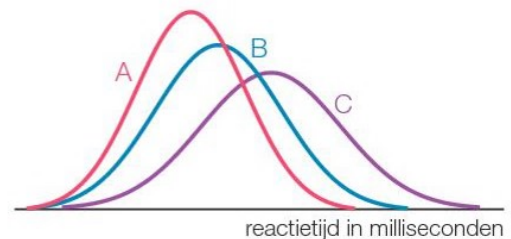
- a Hoeveel appels wegen tussen 158 en 191 gram?
- b Hoeveel appels zijn lichter dan 191 gram?
- c Wat weet je van de gewichten van de zwaarste 125 appels?

A19
⊙ *

Bij drie grote groepen mannen wordt van elke man de reactietijd gemeten.

De eerste groep bestaat uit 18-jarigen, de tweede uit 30-jarigen en de derde uit 60-jarigen.

- a Welke kromme hoort bij de 18-jarigen? En welke bij de 60-jarigen?
Licht je antwoord toe.
- b De groep 18-jarigen heeft een gemiddelde reactietijd van 420 ms. Bijna alle 18-jarigen en 30-jarigen hebben reactietijden vanaf 210 ms, maar de standaardafwijking van de 30-jarigen is 10% groter dan die van de 18-jarigen. Bereken de gemiddelde reactietijd van 30-jarige mannen.



figuur 7.26

INFORMATIEF

De normale verdeling

Veel beroemde geleerden hebben zich beziggehouden met de normale verdeling. Omstreeks 1730 gebruikte de Fransman Abraham de Moivre (1667-1754) als eerste de normale verdeling. Hij ontdekte dat vele kleine toevalligheden in de natuur merkwaardig genoeg tot mooie regelmatige verdelingen kunnen leiden. Ook de veelzijdige geleerde Gauss (1777-1855) werd gefascineerd door de normaalkromme en hij slaagde erin de formule op te stellen bij de kromme. Vandaar dat ook de naam Gauss-kromme gebruikt wordt.

De Belg Adolphe Quetelet (1796-1874) ontdekte dat normaalkrommen goed gebruikt kunnen worden om menselijke kenmerken zoals lichaamslengte en voetlengte te beschrijven.



Carl Friedrich Gauss

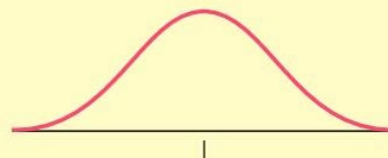
Terugblik

Verdelingen en centrummaten

In de figuren hiernaast zie je voorbeelden van verdelingskrommen bij de volgende soorten verdelingen.

I symmetrische verdeling

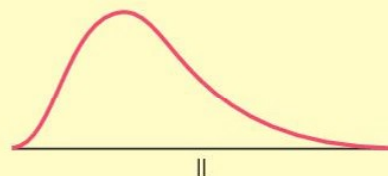
Het gemiddelde, de modus en de mediaan zijn gelijk.



II rechts-scheve verdeling

De modus ligt bij de top.

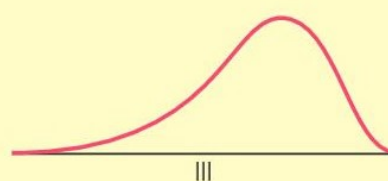
Het gemiddelde is groter dan de mediaan.



III links-scheve verdeling

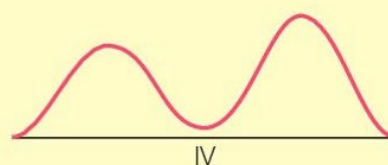
De modus ligt bij de top.

Het gemiddelde is kleiner dan de mediaan.



IV meertoppige verdeling

In de figuur hiernaast zie je een tweetoppige verdeling waarbij het gemiddelde en de mediaan tussen de twee toppen liggen.

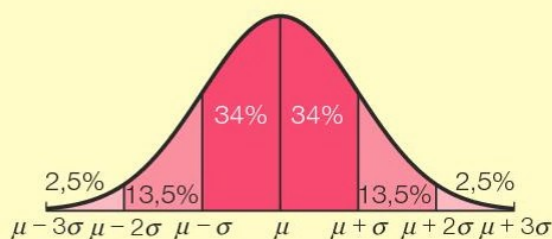


De normale verdeling

Heeft een symmetrische verdeling een klokvorm zoals hiernaast, dan is er sprake van een normale verdeling. De bijbehorende kromme heet de normaalkromme. De top ligt boven het gemiddelde μ . De breedte van de kromme hangt af van de standaardafwijking σ .

Bij een normale verdeling ligt

- ongeveer 68% van alle waarnemingsgetallen tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
- ongeveer 95% van alle waarnemingsgetallen tussen $\mu - 2\sigma$ and $\mu + 2\sigma$
- bijna 100% van alle waarnemingsgetallen tussen $\mu - 3\sigma$ and $\mu + 3\sigma$.

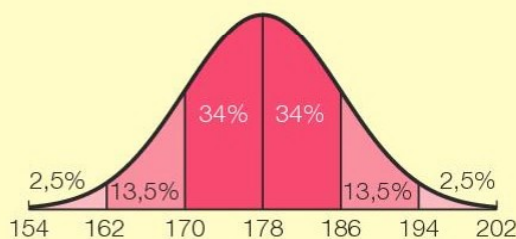


Bij een groep mannen, waarvan de lengte

normaal verdeeld is met $\mu = 178$ cm en

$\sigma = 8$ cm, hoort de verdeling hiernaast.

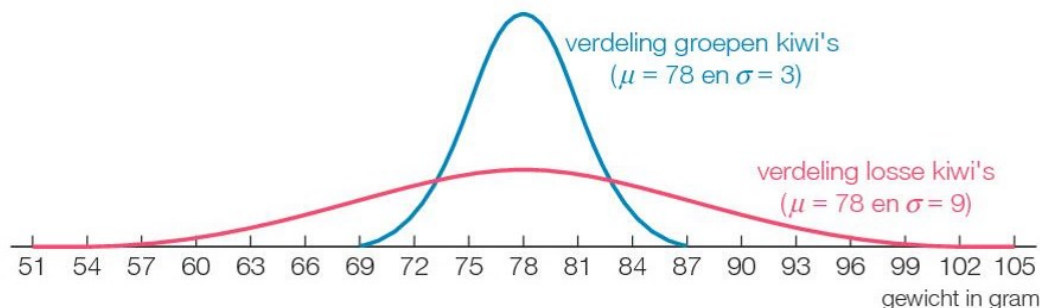
De percentages volgen uit de vuistregels bij de normale verdeling. Je ziet dat 47,5% van de mannen een lengte heeft tussen 162 en 178 cm.



7.2 Betrouwbaarheidsintervallen voor het populatiegemiddelde

020
□ ⊗ *

Bij een kwaliteitscontrole is het gewicht van een groot aantal kiwi's gemeten. Het resultaat is normaal verdeeld, zie de rode verdeling in figuur 7.27. Ter controle zijn de kiwi's door een tweede onderzoeksteam in groepen van negen stuks tegelijk nogmaals gewogen. Hierbij werd telkens het gemiddeld gewicht per kiwi berekend. Het resultaat is ook normaal verdeeld, zie de blauwe verdeling in de figuur.



figuur 7.27

- a In de figuur zie je dat de gemiddelden van beide verdelingen hetzelfde zijn. Is dit verrassend? Licht toe.
- b Hoeveel procent van de los gewogen kiwi's weegt tussen de 69 en 87 gram?
- c Hoeveel procent van de groepen kiwi's weegt tussen de 69 en 87 gram?

Het is opmerkelijk dat de verdeling bij de in groepen gewogen kiwi's een kleinere standaardafwijking heeft. We vragen ons af hoe dat komt. Een meting uit de blauwe verdeling komt op hetzelfde neer als het gemiddelde nemen van negen metingen uit de rode verdeling.

- d Ga uit van de rode verdeling.
Hoeveel procent van de kiwi's weegt meer dan 87 gram? Is het waarschijnlijk dat negen willekeurig gekozen kiwi's allemaal meer dan 87 gram wegen? Is het waarschijnlijk dat het gemiddeld gewicht van negen willekeurig gekozen kiwi's meer dan 87 gram is?
- e Hoe volgt uit je antwoorden bij d dat de blauwe verdeling smaller is dan de rode verdeling? Wat betekent dit voor de standaardafwijking?
- f Vul in. Hoe groter de groep, hoe ... de standaardafwijking.

Theorie A De verdeling van het steekproefgemiddelde

Wanneer je een steekproef neemt bij een variabele die normaal verdeeld is, hoort bij de mogelijke steekproefgemiddelden ook een normale verdeling.

In opgave 20 bekeek je steekproeven van negen kiwi's uit een populatie kiwi's waarvan het gewicht normaal verdeeld is. De verdeling van het steekproefgemiddelde heeft dan hetzelfde gemiddelde, maar een kleinere standaardafwijking. Dit effect wordt veroorzaakt doordat bij het selecteren van kiwi's voor de steekproef de kans op een kiwi met een gemiddeld gewicht veel groter is dan de kans op een kiwi met een uitzonderlijk laag of hoog gewicht. Het zal dus bijvoorbeeld bijna niet voorkomen dat negen keer achter elkaar een hele zware kiwi gekozen wordt.

Bovendien kunnen zelfs negen uitzonderlijke gewichten (zowel licht als zwaar) samen weer een gemiddelde rond het midden van de verdeling opleveren.

Voor de verdeling van het steekproefgemiddelde geldt het volgende.

Bij een steekproef van n objecten uit een normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ is het steekproefgemiddelde normaal verdeeld met gemiddelde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Het aantal objecten n van een steekproef wordt ook wel de **steekproefomvang** of steekproeflengte genoemd.

Voorbeeld

Bij de supermarkt kun je bakjes druiven kopen. De inhoud van deze bakjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van 500 gram en een standaardafwijking van 10 gram.

Bij een onderzoek van de consumentenbond worden steekproeven van vier bakjes genomen en wordt het gemiddelde gewicht van de bakjes druiven in de steekproef berekend. Welk percentage van de steekproeven zal een gemiddeld gewicht van minder dan 490 gram opleveren?



Aanpak

Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van de verdeling van het steekproefgemiddelde.

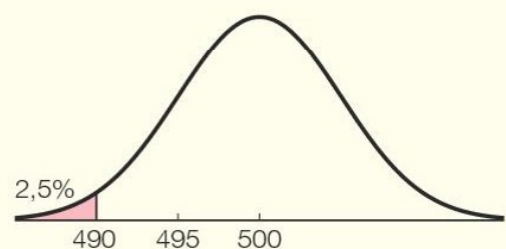
Gebruik vervolgens de vuistregels bij de normale verdeling.

Uitwerking

Voor de steekproeven geldt $\mu = 500$ gram en

$$\sigma = \frac{10}{\sqrt{4}} = 5 \text{ gram.}$$

Zie de schets, dus 2,5%.



21
☐◎

De lengte van de 17-jarige spelers op een groot damesvolleybaltoernooi is normaal verdeeld met een gemiddelde van 168 cm en een standaardafwijking van 8 cm. Op de eerste dag van het toernooi is er een activiteit om kennis te maken. Hiertoe worden de deelnemende dames willekeurig in teams van 16 spelers ingedeeld.

Bereken het percentage teams met een gemiddelde lengte tussen 164 en 172 cm.



22
☐◎*

Bij een groot onderzoek worden leerlingen van 14 jaar getest op hun reactiesnelheid. De reactietijd van 14-jarigen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 600 milliseconde en een standaardafwijking van 120 milliseconde.

- a Is de variabele reactietijd kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.
- b Stel dat de onderzoekers per groep van 16 leerlingen één gemiddelde reactietijd berekenen.
Bij hoeveel procent van de groepen is de gemiddelde reactietijd minder dan 570 ms?
- c Stel dat de onderzoekers per groep van 64 leerlingen één gemiddelde reactietijd berekenen.
Bij hoeveel procent van de groepen is de gemiddelde reactietijd minder dan 570 ms?

A23
☐◎*

Voor een bepaald merk hagelslag geldt dat het gewicht van de pakken normaal verdeeld is met een gemiddelde van 500 gram en een standaardafwijking van 9 gram. Voor de kwaliteitscontrole twijfelt de fabrikant tussen twee manieren om het gemiddelde gewicht van de pakken hagelslag te controleren.

I controle van pallets met 900 pakken hagelslag

II controle van trays met 9 pakken hagelslag

Bij de controle van een pallet van 900 pakken en een doos van 9 pakken blijkt in beide gevallen het gemiddelde gewicht 497 gram per pak te zijn. Volgens de kwaliteitscontroleur is er met de pakken op de pallet iets mis, maar met de pakken in de doos niet.

Hoe komt zij tot deze uitspraak? Licht toe met een berekening.

A24

*

In een attractie kunnen negen personen in een wagentje. Voor de veiligheid wordt bij elk wagentje gedurende de dag het gemiddelde gewicht van de inzittenden vastgesteld. Op een bepaalde dag blijkt dit 70 kg met een standaardafwijking van 5 kg te zijn. Ga ervan uit dat alle wagentjes die dag vol waren.

Ad concludeert op basis van deze informatie dat vrijwel geen enkele bezoeker van de attractie meer dan 85 kg woog.

Onderzoek welke fout Ad maakt en verbeter zijn conclusie.

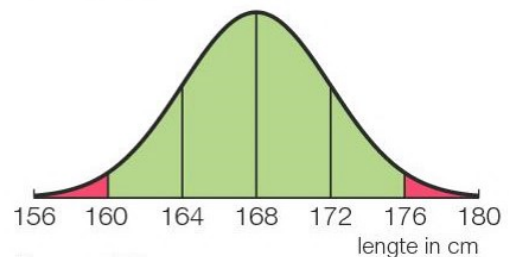
O25

□ ⊗ *

Van een groep mensen is de lengte normaal verdeeld met $\mu = 168$ cm en $\sigma = 8$ cm. Bij steekproeven van 4 personen waarbij telkens de gemiddelde lengte per persoon wordt berekend krijg je de verdeling van het steekproefgemiddelde in figuur 7.28.

- Licht de getallen in de figuur toe.
- Hoeveel procent van de steekproefgemiddelden valt in het groene gebied?
- Van een steekproef van 4 personen blijkt het gemiddelde 158 cm te zijn.

Is dit een waarschijnlijk resultaat? Licht toe.

STEEKPROEVENVERDELING BIJ $n = 4$ 

figuur 7.28

Een steekproefgemiddelde dat in het groene gebied valt noemen we waarschijnlijk. Een steekproefgemiddelde dat in een rood gebied valt noemen we onwaarschijnlijk. Ga bij vraag d weer uit van de groep mensen waarvan de lengte normaal verdeeld is met $\mu = 168$ cm en $\sigma = 8$ cm.

- Geef van de volgende steekproefgemiddelden aan of ze waarschijnlijk of onwaarschijnlijk zijn. Teken telkens eerst de bijbehorende verdeling.

- steekproefomvang 16 en gemiddelde 163 cm
- steekproefomvang 64 en gemiddelde 167 cm
- steekproefomvang 100 en gemiddelde 170 cm
- steekproefomvang 25 en gemiddelde 170 cm

- In het algemeen heeft de verdeling van het steekproefgemiddelde te maken met een gemiddelde μ

en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, waarbij n de steekproefomvang is.

Welk interval hoort in dit geval bij het waarschijnlijke gebied?

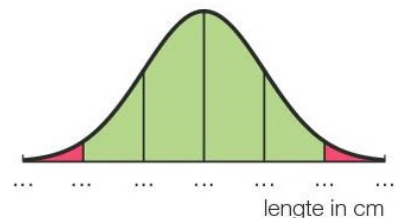
Kies uit:

I $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$

II $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$

III $\left[\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

IV $\left[\mu - 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$



Theorie B Betrouwbaarheidsinterval voor een gemiddelde

In opgave 25 zag je dat het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ in 95% van de gevallen minder dan $2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ van het populatiegemiddelde μ verschilt.

Omgekeerd is het ook zo dat μ in 95% van de gevallen minder dan

$2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ van $\bar{X}$ verschilt. Het interval $\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ bevat dus

in 95% van de gevallen het gemiddelde μ . Dit geeft een goede manier om μ te bepalen uit het steekproefresultaat, met als enige probleem dat σ onbekend is. Deze waarde van σ kun je goed schatten door de steekproefstandaardafwijking S bij je steekproef te gebruiken. Zo kun je dus een interval berekenen dat in 95% van de gevallen μ bevat.

Dit interval heet het **95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde**.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is $\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$. Hierin is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

Voorbeeld

Bij een onderzoek onder 715 Nederlandse jongeren naar hun smartphonegebruik, blijkt de gemiddelde dagelijkse gebruiksduur 3,5 uur te zijn. De bijbehorende standaardafwijking is 1 uur en 10 minuten.

- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde gebruiksduur onder jongeren in minuten nauwkeurig.
- b Welke informatie geeft dit interval in deze context?

Uitwerking

- a $\bar{X} = 3,5 \cdot 60 = 210$ minuten, $S = 70$ minuten en $n = 715$.

$$\left[210 - 2 \cdot \frac{70}{\sqrt{715}}, 210 + 2 \cdot \frac{70}{\sqrt{715}} \right] \approx [205, 215]$$

- b De gemiddelde dagelijkse gebruiksduur van de smartphone van Nederlandse jongeren ligt met 95% zekerheid tussen 205 en 215 minuten.

In het voorbeeld is niet vermeld dat het om een normale verdeling en een representatieve steekproef gaat. In de opgaven over betrouwbaarheidsintervallen mag je aannemen dat aan deze voorwaarden is voldaan.

26 Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde bij

- a $\bar{X} = 100$; $S = 24$ en $n = 144$
- b $\bar{X} = 80,5$; $S = 15,5$ en $n = 100$
- c $\bar{X} = 12,50$ en $\frac{S}{\sqrt{n}} = 0,65$.

27 Bij een steekproef van 65 basisschoolleerlingen met zwemdiploma A is de gemiddelde leeftijd waarop zij het diploma hebben gehaald 6 jaar en 9 maanden. De standaardafwijking is 10 maanden. Bereken in tienden van maanden nauwkeurig het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde leeftijd waarop basisschoolleerlingen het zwemdiploma A halen. Welke informatie geeft dat in deze context?



A28 Het Nibud heeft de uitgaven van Nederlandse scholieren met leeftijden tussen 12 en 18 jaar onderzocht. Het blijkt dat de uitgaven aan kleding en schoenen verschillen tussen jongens en meisjes. Je ziet in de tabel een overzicht van de bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsintervallen voor de gemiddelde uitgaven per maand.

UITGAVEN PER MAAND AAN KLEDING EN SCHOENEN

	geslacht	
	jongens ($n = 1635$)	meisjes ($n = 1625$)
bedrag in euro	[42,15; 43,85]	[38,20; 39,80]

- a Welke twee variabelen zijn in de tabel gebruikt? Geef bij deze variabelen aan of het een kwalitatieve of een kwantitatieve variabele is.
- b Bereken met behulp van de tabel de gemiddelde uitgaven aan kleding en schoenen bij de jongens en bij de meisjes.

Door de formule voor het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde te gebruiken, kun je narekenen dat de steekproefstandaardafwijking S bij de jongens ongeveer 17 euro en bij de meisjes ongeveer 16 euro is.

- c Bereken S voor de uitgaven aan kleding en schoenen bij de jongens en bij de meisjes. Rond af op centen.
- d In de steekproef kwamen 41 meisjes voor die meer dan 71 euro aan kleding en schoenen uitgaven. Onderzoek met een berekening of dit overeenkomt met wat je op basis van de vuistregels bij de normale verdeling zou verwachten.
- e Ga met een formule op het formuleblad na of de grootte van het verschil in uitgaven aan kleding en schoenen tussen jongens en meisjes groot, middelmatig of gering is.

A29

Mevrouw Hendriks geeft een examentraining om haar leerlingen goed op het eindexamen voor te bereiden. Ze geeft ook een afsluitende toets met opgaven waarvan zij weet dat er landelijk gemiddeld 50 punten voor worden behaald. Ze gaat ervan uit dat haar examenklassen vóór de examentraining representatief zijn voor de populatie examenleerlingen in Nederland.

Na de examentraining maakt haar klas 5HA1 de afsluitende toets. De resultaten staan in de tabel hiernaast.

RESULTATEN 5HA1

n	25
$\bar{X}$	52
S	6

- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze tabel.

Mevrouw Hendriks hoopt met de resultaten te kunnen zeggen dat leerlingen na haar examentraining met 95% zekerheid boven het landelijk gemiddelde scoren.

- b** Licht toe dat ze dit niet kan zeggen op basis van het 95%-betrouwbaarheidsinterval van vraag a.

Mevrouw Hendriks geeft de training ook aan haar klas 5HA2. Aan de resultaten in de tabel hiernaast ziet ze al snel dat hier ook niet met 95% zekerheid te zeggen is dat de leerlingen boven het landelijk gemiddelde scoren.

RESULTATEN 5HA2

n	24
$\bar{X}$	52
S	6

- c** Verklaar hoe ze dit, zonder het interval op te stellen, kan zien.
d De leerlingen uit de twee klassen samen hebben een gemiddelde score van 52 met een standaardafwijking van 6.

Welke conclusie trekt ze als ze de resultaten van de leerlingen uit de twee klassen samen onderzoekt met een 95%-betrouwbaarheidsinterval? Verklaar het resultaat.

E30

Behalve 95%-betrouwbaarheidsintervallen zijn er ook 90%- en 99%-betrouwbaarheidsintervallen. Deze hebben dezelfde vorm als een 95%-betrouwbaarheidsinterval, dus $\left[\bar{X} - a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$.

Bij een 90%-betrouwbaarheidsinterval is a kleiner dan 2 en bij een 99%-betrouwbaarheidsinterval is a groter dan 2.

- a** Verklaar dit.

In opgave 29a vond je het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[49,6; 54,4]$. Bij deze vraag hoort het 99%-betrouwbaarheidsinterval $[48,9; 55,1]$. Hieruit volgt dat voor een 99%-betrouwbaarheidsinterval geldt dat $a \approx 2,6$.

- b** Laat dit met een berekening zien.
c Bij een 90%-betrouwbaarheidsinterval geldt $a \approx 1,6$. Hoeveel keer zo breed is een 99%-betrouwbaarheidsinterval als een 90%-betrouwbaarheidsinterval? Rond af op één decimaal.
d Bedenk een situatie waarbij de voorkeur uitgaat naar een 99%-betrouwbaarheidsinterval.

Terugblik

De verdeling van het steekproefgemiddelde

Bij steekproeven met steekproefomvang n uit een normale verdeling met gemiddelde μ en standaardafwijking σ is het steekproefgemiddelde

normaal verdeeld met gemiddelde μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Een supermarkt verkoopt bakjes kersen. De inhoud van de bakjes is normaal verdeeld met gemiddelde 350 gram en standaardafwijking 15 gram. Neem je steekproeven van 25 van deze bakjes, dan geldt voor deze steekproeven dat het gemiddelde gewicht van de inhoud van deze

bakjes 350 gram is en de standaardafwijking $\frac{15}{\sqrt{25}} = 3$ gram. Het gemiddelde zal per steekproef verschillen, maar toch zal in 95% van de steekproeven het steekproefgemiddelde tussen $350 - 2 \cdot 3 = 344$ gram en $350 + 2 \cdot 3 = 356$ gram liggen. Dit volgt uit de vuistregels bij de normale verdeling.

Betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$\left[\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$. Hierin is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, S de steekproefstandaardafwijking en n de steekproefomvang.

Een supermarkt verkoopt bakjes kersen. Op de bakjes staat dat de inhoud 350 gram is. Bij een controle wil men onderzoeken of de inhoud inderdaad 350 gram is. Daartoe neemt men een steekproef van 25 van deze bakjes en berekent men van deze bakjes het gemiddelde gewicht en de standaardafwijking. Men vindt $\bar{X} = 346$ gram en $S = 14$ gram.

Hiermee kan het 95%-betrouwbaarheidsinterval worden berekend.

Je krijgt $\left[346 - 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{25}}, 346 + 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{25}} \right] = [340,4; 351,6]$.

Dit betekent dat met een betrouwbaarheid van 95% het gemiddelde gewicht van de bakjes kersen in de supermarkt tussen 340,4 en 351,6 gram ligt. Het kan dus zijn dat het gemiddelde gewicht van de bakjes in de supermarkt inderdaad 350 gram is.

Had men een steekproef genomen met lengte 100 en daarbij ook gevonden dat $\bar{X} = 346$ gram en $S = 14$ gram, dan zou het 95%-betrouwbaarheidsinterval zijn

$\left[346 - 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{100}}, 346 + 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{100}} \right] = [343,2; 348,8]$. In dat geval kan men

dus niet met 95% zekerheid zeggen dat het gemiddelde gewicht van de bakjes kersen in de supermarkt 350 gram is.

7.3 Betrouwbaarheidsintervallen voor de populatieproportie

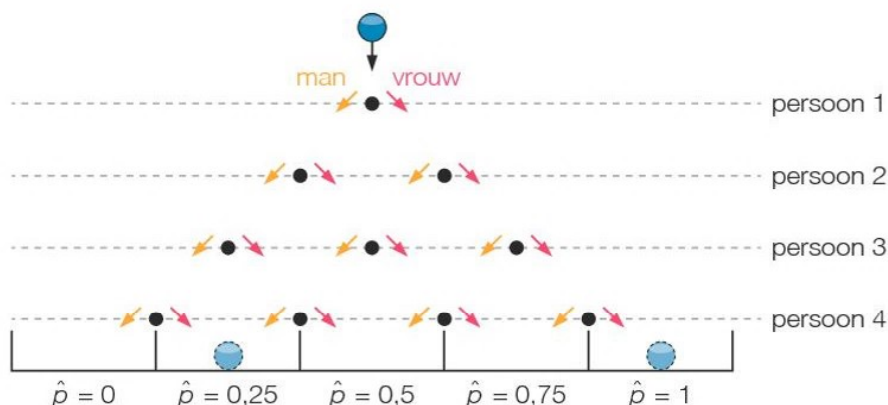
031
☐⊙*

Bij een enquête onder een grote groep willekeurig gekozen Nederlanders zal de proportie vrouwen ongeveer 0,5 zijn. Leg je de enquête voor aan groepen van vier willekeurig gekozen Nederlanders, dan zal de proportie vrouwen variëren. Zijn er bijvoorbeeld 3 vrouwen in een groep, dan is de proportie $\frac{3}{4} = 0,75$.

- a Welke proportie vrouwen lijkt je waarschijnlijker: 0,25 of 1? Licht toe.

Ondanks dat de uitkomst van de steekproef willekeurig is, zijn niet alle uitkomsten even waarschijnlijk.

In de figuur hieronder staan alle mogelijke proporties vrouwen bij een steekproef met vier personen schematisch weergegeven als een bord van Galton.



figuur 7.29

- b Het nemen van een steekproef kunnen we in de figuur simuleren door een balletje op de bovenste pin te laten vallen en te kijken in welk bakje het balletje eindigt.

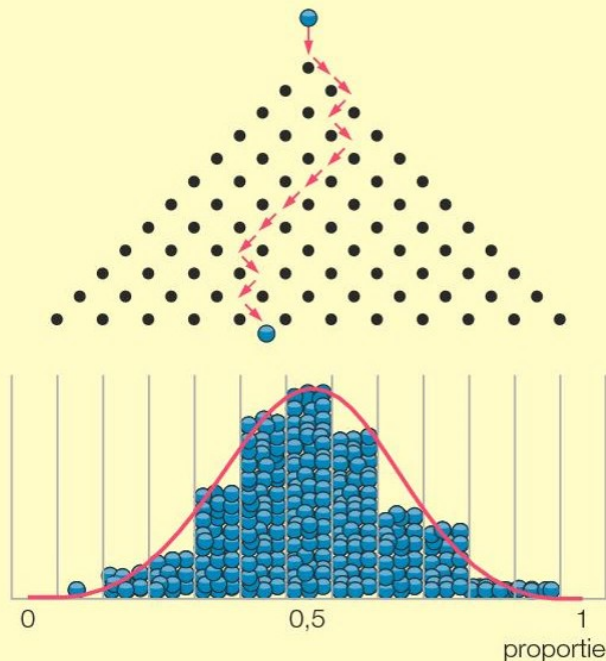
Waarom zal het balletje vaker bij $\hat{p} = 0,25$ eindigen dan bij $\hat{p} = 1$?

Theorie A De verdeling van de steekproefproportie

Wanneer je een kwalitatieve variabele (zoals bijvoorbeeld geslacht of hobby's) onderzoekt, kun je geen gemiddelde berekenen. Wel kun je de proportie bij de verschillende waarden van de variabele berekenen.

Wanneer bij een onderzoeksvraag een kwalitatieve variabele centraal staat, ligt een analyse met proporties voor de hand.

In opgave 31 zag je dat er bij een populatieproportie van 0,5 verschillende steekproefproporties kunnen ontstaan. Ook zag je dat niet alle mogelijke steekproefproporties even waarschijnlijk zijn. De verdeling die aangeeft hoe waarschijnlijk de verschillende steekproefproporties zijn, heet de **verdeling van de steekproefproportie**. Hoe groter de steekproefomvang hoe beter de verdeling van de steekproefproportie overeenkomt met de normale verdeling.



figuur 7.30

Voor de verdeling van de steekproefproportie gebruik je het volgende.

Bij populatieproportie p en steekproefomvang n is de steekproefproportie normaal verdeeld met gemiddelde p

en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

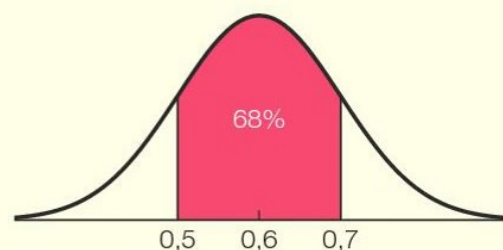
Voorbeeld

In een land heeft 60% van de bevolking bruine ogen. Bij een groep van 24 personen wordt de proportie personen met bruine ogen genoteerd. Bereken bij welk percentage van de mogelijke steekproeven de steekproefproportie tussen 0,5 en 0,7 zal liggen.

Uitwerking

$$\mu = p = 0,6 \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{24}} = 0,1.$$

Zie de schets, dus bij 68%.



R32
☐◎

Zie het voorbeeld.

- a Tussen welke proporties verwacht je dat de middelste 95% van de mogelijke steekproeven zal liggen?
- b Hoeveel procent van de mogelijke steekproeven heeft een proportie groter dan 0,64 bij een steekproefomvang van 600 personen?

33
☐◎*

De klas van meneer Verheijen voert in de stad een onderzoek uit. Alle 30 leerlingen selecteren willekeurig 25 personen en noteren onder andere de proportie mannen onder deze 25 personen.

- a Het blijkt dat 90% van de leerlingen een steekproefproportie tussen 0,4 en 0,6 heeft genoteerd. Dit resultaat maakt meneer Verheijen achterdochtig.
Laat met een berekening zien dat meneer Verheijen terecht achterdochtig is.
- b Pieter vond in zijn steekproef $\hat{p} = 0,28$.
Betekent dit dat hij iets verkeerd heeft gedaan? Licht toe.

A34
☐◎*

Bij een uitbraak van een ziekte onder vleermuizen is 3 op de 5 vleermuizen besmet. Een kolonie vleermuizen wordt onderzocht door 24 vleermuizen te testen op deze ziekte. De onderzoekers spreken van een zorgelijke situatie als meer dan de helft van de kolonie besmet is. Er is sprake van een alarmerende steekproef wanneer de proportie besmette vleermuizen 0,5 of hoger is.

Zelfs als 3 op de 5 vleermuizen in de kolonie besmet is, zal een deel van de steekproeven niet alarmerend zijn.

Er is een risico dat de onderzoekers onterecht denken dat de situatie in de kolonie niet zorgelijk is.

- a Laat met een berekening zien dat dit risico 16% is.
- b Een onderzoeker stelt dat dit risico meer dan 6 keer zo klein wordt door niet 24 maar 96 vleermuizen te onderzoeken.
Onderzoek of zij gelijk heeft.



A35
  *

Glenn is een fanatiek basketballer. Ze heeft een goed schot en scoort gemiddeld 7 van de 10 vrije worpen. Uiteraard heeft ze weleens dagen waarop ze minder vrije worpen scoort dan gemiddeld. Arthur twijfelt aan de schutterskwaliteiten van Glenn en beweert dat ze niet eens 60% van haar vrije worpen scoort. Ze gaan de volgende weddenschap aan: Glenn neemt 21 vrije worpen en wint als ze er minstens 60% scoort. Je kunt het vrije worpen schieten van Glenn opvatten als een steekproef uit een populatie van schoten waarvan ze 70% scoort.

- a** Bereken welk percentage van dit soort weddenschappen Glenn zal winnen.



Tegen de verwachting in verliest Glenn de weddenschap. Ze moet een week lang de tas van Arthur dragen. Ze stelt voor om dubbel of niets te spelen met een test van 84 schoten. Arthur accepteert haar voorstel.

- b** Bereken hoeveel keer zo waarschijnlijk het is dat Glenn deze weddenschap wint als dat Arthur deze wint.

O36
  *

In een populatie heeft 40% van de personen eigenschap A. We bekijken de verdelingskromme van de steekproefproportie bij verschillende steekproeflengten. In de figuur hiernaast staan de gebieden aangegeven die je kent uit de vuistregels bij de normale verdeling.

We noemen steekproefproporties die in het groene gebied vallen waarschijnlijk. Steekproefproporties die in een rood gebied vallen, noemen we onwaarschijnlijk.

We nemen steekproeven van n personen en noteren de proportie personen met eigenschap A als $\hat{p}$.

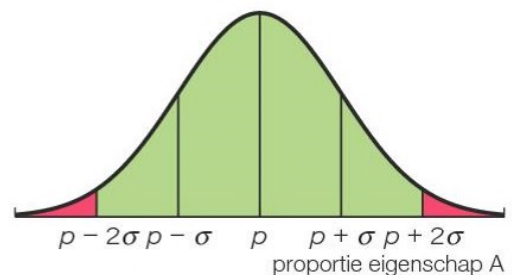
- a** Geef van de volgende steekproefproporties aan of ze waarschijnlijk of onwaarschijnlijk zijn. Teken telkens eerst de bijbehorende verdeling.

- I** $n = 24$ en $\hat{p} = 0,53$
- II** $n = 96$ en $\hat{p} = 0,53$
- III** $n = 96$ en $\hat{p} = 0,33$
- IV** $n = 2400$ en $\hat{p} = 0,41$

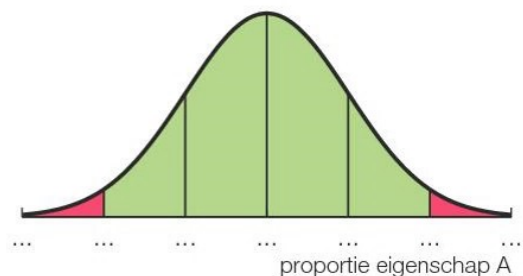
- b** In het algemeen heeft de verdeling van de steekproefproportie een

gemiddelde p en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Welk interval hoort in dit geval bij het waarschijnlijke gebied?



figuur 7.31

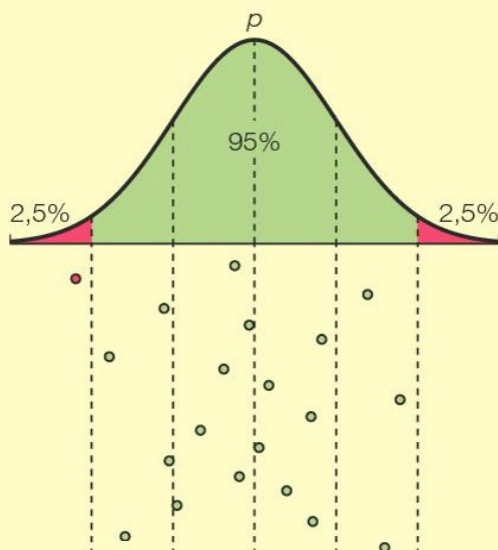


Theorie B Betrouwbaarheidsinterval voor een proportie

Bij een onderzoek onder n personen met populatieproportie p zal de steekproefproportie $\hat{p}$ per steekproef verschillen. De waarden van $\hat{p}$ ontstaan uit een steekproevenverdeling die normaal verdeeld is met

gemiddelde p en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

In figuur 7.32 staat deze steekproevenverdeling met daaronder 20 steekproefproporties uit deze verdeling. Elke steekproefproportie staat als bolletje weergegeven. De verwachting is dat 95% van de steekproefproporties in het groene gebied valt.

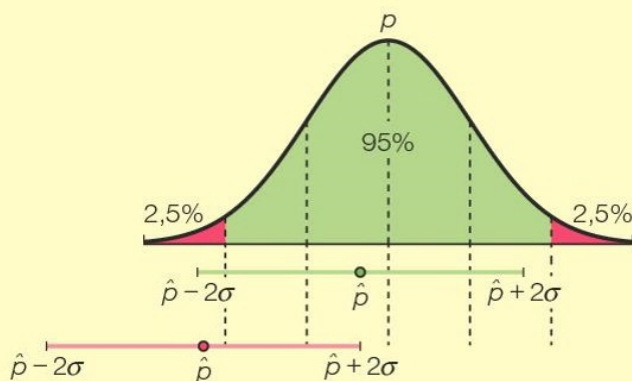


figuur 7.32

In figuur 7.33 is bij twee steekproeven ook het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ getekend als een lijnstuk vanaf $\hat{p} - 2\sigma$ tot en met $\hat{p} + 2\sigma$.

Bij het groene lijnstuk valt de populatieproportie p binnen dit interval.

Bij het rode lijnstuk valt de populatieproportie p buiten dit interval.



figuur 7.33

In 95% van de steekproeven zal het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ de populatieproportie p bevatten.

Om het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ te berekenen heb je

$$\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ nodig. Het probleem is dat } p \text{ onbekend}$$

is, daar ben je immers naar op zoek. Een oplossing voor dit probleem is het schatten van p met de steekproefproportie $\hat{p}$. Je vervangt dan p door $\hat{p}$ bij het berekenen van σ . Voor grotere waarden van n zal deze schatting steeds beter kloppen.

Zo krijg je een interval dat in 95% van alle steekproeven p bevat, dit heet het **95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie**.

Het doel van een onderzoek naar een proportie is het bepalen van p . Dit doe je op basis van $\hat{p}$, het resultaat van de steekproef.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$. Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ met n de steekproefomvang.

Voorbeeld

Twee dagen voor een verkiezing wordt aan 1200 stemgerechtigde Nederlanders gevraagd of ze van plan zijn te gaan stemmen.

Van deze 1200 zeggen 756 inderdaad te gaan stemmen.

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie stemgerechtigde Nederlanders die van plan zijn te gaan stemmen.

Uitwerking

$$\hat{p} = \frac{756}{1200} = 0,63 \text{ en } \sigma = \sqrt{\frac{0,63 \cdot 0,37}{1200}} = 0,0139...$$

$$\hat{p} - 2\sigma = 0,63 - 2 \cdot 0,0139... \approx 0,602 \text{ en}$$

$$\hat{p} + 2\sigma = 0,63 + 2 \cdot 0,0139... \approx 0,658$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,602; 0,658]$.

Rond in een betrouwbaarheidsinterval proporties af op drie decimalen, tenzij anders wordt gevraagd.



Zie het voorbeeld.

Bij een andere peiling worden 600 stemgerechtigde Nederlanders ondervraagd. Hiervan zijn er 378 van plan te gaan stemmen.

- Toon aan dat de steekproefproportie ook nu gelijk is aan 0,63 en bereken de standaardafwijking. Rond af op drie decimalen.
- Bereken het hierbij behorende 95%-betrouwbaarheidsinterval.
- Vergelijk het 95%-betrouwbaarheidsinterval van vraag b met dat van het voorbeeld.
Welke conclusie trek je?

38

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie bij

- a $\hat{p} = 0,5$ en $n = 100$
- b $\hat{p} = 0,46$ en $n = 250$
- c $\hat{p} = \frac{4}{7}$ en $n = 98$
- d een steekproef van 700 personen waarbij 36% het onderzochte kenmerk had.

39



Een bioloog onderzoekt de verhouding tussen mannetjes en vrouwtjes van de bruine kikker in bergmeren van de Pyreneeën.

Van de 150 onderzochte kikkers blijken er maar liefst 117 een mannetje te zijn.

- a Bereken de steekproefproportie van de mannetjeskikkers.
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie mannetjeskikkers.



A40



Bij een onderzoek naar het roken van sigaretten worden 840 volwassenen ondervraagd. Hiervan blijken er 235 te roken.

- a Is de variabele *rookt sigaretten* kwalitatief of kwantitatief? Licht toe.
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie volwassenen die roken.

Bij het onderzoek waren 470 mannen en 370 vrouwen betrokken. Van de mannen rookten er 146.

- c Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie volwassen mannen die roken. Doe dat ook voor de vrouwen.
- d Vergelijk de betrouwbaarheidsintervallen van vraag c. Kun je met 95% zekerheid concluderen dat het deel van de vrouwen dat sigaretten rookt, kleiner is dan het deel van de mannen dat sigaretten rookt?

A41



Bij de presidentsverkiezingen in een land moet gekozen worden tussen de kandidaten A en B. In een peiling die voorafgaat aan de verkiezingen zeggen 935 mensen te gaan stemmen. Hiervan zeggen 487 op kandidaat A te gaan stemmen, de anderen kiezen voor kandidaat B.

Onderzoek of je met een betrouwbaarheid van 95% kunt zeggen dat kandidaat A de verkiezingen zal gaan winnen.

Terugblik

De verdeling van de steekproefproportie

Bij een steekproef met steekproefomvang n uit een populatie met populatieproportie p is de steekproefproportie normaal verdeeld met

gemiddelde p en standaardafwijking $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Een supermarkt verkoopt bakjes kersen waarvan bekend is dat 30% van de bakjes beschadigd is. Neem je steekproeven van 84 van deze bakjes, dan zijn bij deze steekproeven gemiddeld 30% van de bakjes beschadigd. De bijbehorende standaardafwijking is

$\sigma = \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{84}} = 0,05$. De proportie zal per steekproef verschillen, maar toch zal bij 95% van de steekproeven de proportie van de bakjes die beschadigd is, liggen tussen $0,3 - 2 \cdot 0,05 = 0,2$ en $0,3 + 2 \cdot 0,05 = 0,4$, oftewel tussen 20% en 40%. Dit volgt uit de vuistregels bij de normale verdeling.

Betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$. Hierin is $\hat{p}$ de steekproefproportie en $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ met n de steekproefomvang.

De verkoper verwacht dat 30% van de bakjes kersen beschadigd is. Om dit vermoeden te controleren, neemt men een steekproef van 50 bakjes. Het blijkt dat hiervan 20 bakjes beschadigd zijn.

Hiermee kan een 95%-betrouwbaarheidsinterval worden berekend.

Omdat $\hat{p} = \frac{20}{50} = 0,4$ en $\sigma = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{50}} = 0,069...$ krijg je $\hat{p} - 2\sigma = 0,4 - 2 \cdot 0,069... \approx 0,261$ en $\hat{p} + 2\sigma = 0,4 + 2 \cdot 0,069... \approx 0,539$. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,261; 0,539]$. Dus op basis van deze steekproef kun je met 95% zekerheid zeggen dat het percentage beschadigde bakjes tussen 26,1% en 53,9% ligt.

Had men een steekproef genomen met lengte 100 en blijken 40 bakjes beschadigd te zijn, dan is ook $\hat{p} = 0,4$. Nu echter is

$\sigma = \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{100}} = 0,048...$, zodat $\hat{p} - 2\sigma = 0,4 - 2 \cdot 0,048... \approx 0,302$ en $\hat{p} + 2\sigma = 0,4 + 2 \cdot 0,048... \approx 0,498$. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $[0,302; 0,498]$.

Op basis van dit interval lijkt het niet waarschijnlijk dat het percentage beschadigde bakjes 30% is.

7.4 Betrouwbaarheidsintervallen toepassen

O42
☐◎*

Voor een onderzoek naar het kijkgedrag van jongeren op YouTube zijn de volgende deelvragen opgesteld.

- 1 Hoeveel tijd besteden jongeren wekelijks aan het kijken van YouTube-video's?
- 2 Welk deel van de jongeren kijkt dagelijks een video op YouTube?

De onderzoekers willen gebruik maken van betrouwbaarheidsintervallen om uit het resultaat van de steekproef een conclusie te trekken over het kijkgedrag van de populatie.

Welke soort betrouwbaarheidsinterval zou je aanraden bij deelvraag 1? En welke soort bij deelvraag 2?

Theorie A Twee soorten betrouwbaarheidsintervallen

In dit hoofdstuk heb je kennis gemaakt met twee soorten betrouwbaarheidsintervallen.

- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde.
- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

In opgave 42 zijn bij de deelvragen verschillende soorten betrouwbaarheidsintervallen nodig. Welke soort je kiest hangt af van het type variabele, kwantitatief of kwalitatief, dat bij de deelvraag hoort.

Bij de vraag: 'Hoeveel tijd besteden jongeren wekelijks aan het kijken van YouTube-video's?', wil je weten hoelang jongeren in de steekproef wekelijks gemiddeld naar YouTube-video's kijken. Omdat het hier gaat om een gemiddelde, ligt het betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde voor de hand.

Bij een kwantitatieve variabele gebruik je het betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde.

Bij de vraag: 'Welk deel van de jongeren kijkt dagelijks een video op YouTube?', is het antwoord een deel oftewel een proportie. Daarom gebruik je het betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.

Bij een kwalitatieve variabele gebruik je het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie.

Vaak kun je ook aan de gegevens in een opgave zien welk betrouwbaarheidsinterval gevraagd wordt.

Voor het betrouwbaarheidsinterval voor een populatieproportie heb je $\hat{p}$ en n nodig.

Voor het betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde heb je $\bar{X}$, S en n nodig.

43
□ ⊙ *

Geef bij de onderstaande onderzoeksvragen steeds aan welk soort betrouwbaarheidsinterval het meest voor de hand ligt.

- a Hoeveel tijd besteden mannen dagelijks aan hun uiterlijk?
- b Welk percentage eindexamenleerlingen heeft al een rijbewijs?
- c Welk deel van de Nederlanders doet aan afvalscheiding?
- d Zijn basketballers of voetballers sneller op de 100 m sprint?
- e Scoren veel leerlingen op school boven het landelijk gemiddelde?

44
□ ⊙ *

Bij een steekproef van 150 middelbare scholieren bleek dat 60% van de scholieren het afgelopen schooljaar meer dan 120 minuten per week aan wiskundehuiswerk besteedt. Verder bleek voor het aantal minuten wiskundehuiswerk per week te gelden dat $\bar{X} = 150$ en $S = 40$.

- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddeld aantal minuten wiskundehuiswerk per week.
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie leerlingen die meer dan 120 minuten per week aan wiskundehuiswerk besteedt.

A45
□ ⊙ *

Tijdens een landelijke bijeenkomst van docenten lichamelijke opvoeding (lo) werd bij 135 deelnemers een Coopertest afgenomen. De deelnemers moesten 12 minuten hardlopen en daarbij een zo ver mogelijke afstand afleggen. In de tabel zie je een schaal voor de beoordeling van resultaten.

BEOORDELING RESULTATEN COOPERTTEST

beoordeling	geslacht	
	m	v
zeer slecht	0 – 1600 m	0 – 1500 m
slecht	1600 – 2000 m	1500 – 1800 m
redelijk	2000 – 2400 m	1800 – 2200 m
goed	2400 – 2800 m	2200 – 2700 m
zeer goed	2800 – 3200 m	2700 – 3100 m
uitstekend	3200 – 3600 m	3100 – 3500 m

Van de 75 mannelijke docenten bleken er 3 een zeer slechte conditie te hebben en 12 een slechte conditie. Afstanden onder de 2000 m voor mannen worden door de organisatie als onvoldoende bestempeld.

- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aandeel mannelijke lo-docenten met een onvoldoende conditie.
- b Bij de vrouwelijke docenten was de gemiddelde afstand 2750 m met een steekproefstandaardafwijking van 550 m. Je mag er vanuit gaan dat het een representatieve steekproef betreft.
Kun je met 95% zekerheid concluderen dat de gemiddelde vrouwelijke lo-docent een zeer goede conditie heeft? Licht toe.

A46
☐◎*

Op een congres werden aselekt 200 van de 1390 aanwezigen gevraagd mee te doen aan een enquête over rijbewijzen. Het bleek dat 79 van de deelnemers aan de enquête geen rijbewijs hadden. Bij de deelnemers die wel een rijbewijs hadden, bleek de gemiddelde leeftijd waarop het rijbewijs behaald was 21,7 jaar met een standaardafwijking van 3,7 jaar.

- a Wat betekent aselekt in deze context?
- b Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde leeftijd waarop bezoekers van dit congres met een rijbewijs, hun rijbewijs behaalden. Rond af op één decimaal.
- c Een van de deelnemers denkt dat een derde van alle bezoekers van het congres geen rijbewijs heeft. Onderzoek met een 95%-betrouwbaarheidsinterval of hij gelijk kan hebben.

A47
☐◎

Laura en Storr onderzoeken voor hun profielwerkstuk hoeveel inwoners van Nijmegen tevreden zijn met de manier van afval inzamelen. Ze hebben een representatieve steekproef samengesteld van 500 Nijmegenaren. Van de mensen in de steekproef zijn er 425 tevreden over de manier van afval inzamelen. Op basis van dit resultaat en het gegeven dat Nijmegen 176 duizend inwoners heeft, willen ze met een 95%-betrouwbaarheidsinterval weergeven hoeveel Nijmegenaren achter de manier van afval inzamelen staan.

Bereken dit betrouwbaarheidsinterval en rond af op duizendtallen.

A48
*

Dani en Jay hebben krasloten als onderwerp voor hun profielwerkstuk. Uit hun onderzoek blijkt dat bij een steekproef van 400 loten er 160 een prijs hadden. Dus gemiddeld moet iemand 2,5 kraslot kopen om een prijs te hebben.

Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde aantal krasloten dat nodig is om een prijs te hebben en rond af op twee decimalen.

O49
☐◎*

Carolijn heeft de volgende berekeningen in haar schrift staan.

The image shows handwritten mathematical formulas on a piece of graph paper. On the left, two equations are written: $\bar{X} - 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 25$ and $\bar{X} + 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 33$. Arrows from these two equations point to a central equation: $\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 29 \pm 4$. To the right of the equations, on a yellow sticky note, is a handwritten definition: "S is de steekproefstandaardafwijking" and " $\frac{S}{\sqrt{n}}$ is de standaardafwijking bij het steekproefgemiddelde".

- a Wat was bij haar berekening de waarde van $\bar{X}$? Hoe kun je die berekenen uit de grenzen 25 en 33?
- b Welke waarde hoort bij de standaardafwijking $\frac{S}{\sqrt{n}}$?

Theorie B Verschillende notaties voor betrouwbaarheidsintervallen

Op het formuleblad bij het centraal examen staan de formules voor de 95%-betrouwbaarheidsintervallen als volgt genoteerd.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ met } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde, } n \text{ de steekproefomvang en } S \text{ de steekproefstandaardafwijking.}$$

Er zijn drie opmerkelijke verschillen tussen de notatie op het formuleblad bij het centraal examen en de notatie in dit boek.

- 1 In plaats van intervalnotatie wordt een notatie met $\pm$ gebruikt.
- 2 Voor de steekproefproportie wordt p in plaats van $\hat{p}$ gebruikt.
- 3 Op de plek van σ staat $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

In de notatie op het formuleblad zijn de formules voor de onder- en bovengrens van een interval samengevoegd met het $\pm$ -teken. Door in plaats van dit teken een $-$ te nemen krijg je de formule voor de ondergrens van het interval. Neem je $+$ dan krijg je de bovengrens.

Wanneer je het interval $[0,55; 0,85]$ in deze notatie schrijft, krijg je $0,7 \pm 0,15$. Het voordeel van deze notatie is dat de steekproportie of het steekproefgemiddelde direct af te lezen is (in dit geval 0,7). Het nadeel is dat de grenzen niet direct af te lezen zijn.

Soms wordt het dakje op de p bij de steekproefproportie weggelaten. Het is dan belangrijk dat je zelf goed kunt inschatten of je met p of $\hat{p}$ te maken hebt.

Bij het interval $[0,55; 0,85]$ is 0,55 de ondergrens en 0,85 de bovengrens van het interval.

Voorbeeld

Gegeven is het 95%-betrouwbaarheidsinterval $0,32 \pm 0,04$.

- a Schrijf dit betrouwbaarheidsinterval in de intervalnotatie.
- b Bereken de standaardafwijking σ .

Uitwerking

- a $0,32 - 0,04 = 0,28$ en $0,32 + 0,04 = 0,36$, dus $[0,28; 0,36]$.
- b $2\sigma = 0,04$ dus $\sigma = 0,02$.

50



- a Schrijf het betrouwbaarheidsinterval $[0,405; 0,435]$ in de $\pm$ -notatie.
- b Schrijf het interval $0,21 \pm 0,015$ in de intervalnotatie.
- c Bij een steekproef zijn de resultaten $\bar{X} = 180$, $S = 9,8$ en $n = 210$. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze steekproef. Schrijf het resultaat in beide notaties. Rond af op twee decimalen.
- d In een wetenschappelijk tijdschrift staat bij de steekproefresultaten $p = 0,12$ en $n = 11\,733$ genoteerd. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze steekproef. Schrijf het resultaat in beide notaties.

A51



- Bij een onderzoek naar woningtypen onder Nederlanders met een huurwoning bleek dat van de 26 580 respondenten er 10 098 in een rijtjeshuis wonen.
- a Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage huurders dat in een rijtjeshuis woont. Geef je antwoord in de intervalnotatie.
 - b Dennis beweert dat de populatieproportie 0,40 zal zijn. Is dit op basis van je antwoord bij a waarschijnlijk? Licht toe.
 - c Het onderzoek werd in verschillende provincies uitgevoerd en leverde uiteenlopende resultaten op. In Friesland was het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het aantal huurders dat in een rijtjeshuis woont gelijk aan $[27\,281; 30\,165]$. Bereken hoeveel de steekproefproportie van Friesland verschilt van de steekproefproportie van heel Nederland. Gebruik dat er in Friesland 110 900 huurders zijn.

A52



- Uit een onderzoek van het Voedingscentrum blijkt dat Nederlanders fors te weinig groenten eten. Het advies is om 250 gram groente per dag te eten, maar dat lukt niet veel mensen. Uit cijfers van het Voedingscentrum blijkt dat een Nederlander gemiddeld 127 gram groente per dag eet. Ilja kan dit maar moeilijk geloven en doet een klein onderzoek onder haar vrienden. Bij $n = 50$ vindt zij een gemiddelde van 210 gram groente per dag met een standaardafwijking van 80 gram.
- a Laat met het 95%-betrouwbaarheidsinterval zien dat het hier waarschijnlijk niet om een representatieve steekproef gaat. Welke notatie van het betrouwbaarheidsinterval is hier het handigst? Licht toe.
 - b Uit het onderzoek van het Voedingscentrum blijkt dat het slecht gesteld is met de dagelijkse hoeveelheid groente die jongens van 14-18 jaar eten. Het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze groep was 130 ± 40 gram. Volgens Bart kun je aan dit betrouwbaarheidsinterval zien dat 95% van de jongens van 14-18 jaar dagelijks tussen 90 en 170 gram groenten eet. Ben je het met Bart eens? Licht toe.

Rowan en Donata maken een profielwerkstuk over voeding met als deelvraag ‘Welk deel van de havo-leerlingen eet minstens een dag in de week vegetarisch?’. Hun onderzoek onder 100 leerlingen binnen de eigen school leverde een proportie van 0,32 op. Dezelfde vragenlijst leverde bij vier andere scholen ook de proportie 0,32 op; dit keer onder 400 leerlingen.



- a Bereken bij beide situaties het 95%-betrouwbaarheidsinterval. Gebruik de $\pm$ -notatie.
- b Rowan zegt dat het interval bij de eigen school minder betrouwbaar is. Donata zegt dat het interval bij de eigen school minder nauwkeurig is. Een van de twee heeft gelijk. Licht toe wie dat is.

Aan het interval $[\hat{p} - 2\sigma, \hat{p} + 2\sigma]$ kun je zien dat de breedte van het bijbehorende betrouwbaarheidsinterval gelijk is aan 4σ .

- c Licht dit toe.
- d Vul in. Als de waarde van n groter wordt, dan wordt de breedte van het betrouwbaarheidsinterval ...

Theorie C De nauwkeurigheid van een betrouwbaarheidsinterval

Bij betrouwbaarheidsintervallen spelen twee aspecten een belangrijke rol.

Het eerste aspect is de *betrouwbaarheid*: we nemen een marge van twee standaardafwijkingen op de uitkomst van de steekproef zodat in 95% van de gevallen de populatieproportie of het populatiegemiddelde in het interval ligt. Neem je meer dan twee standaardafwijkingen marge, dan is het interval meer dan 95% betrouwbaar. Meer marge geeft zo meer betrouwbaarheid.

Het tweede aspect is de *nauwkeurigheid*: we willen zo precies mogelijk weergeven waar de populatieproportie of het populatiegemiddelde ligt. Stel dat een winkel met 95% zekerheid weet dat de proportie tevreden klanten tussen 0,1 en 0,9 ligt, dan geeft dit maar weinig informatie: het is niet nauwkeurig. Je kunt het betrouwbaarheidsinterval nauwkeuriger maken door minder marge te nemen. Minder marge geeft zo meer nauwkeurigheid.

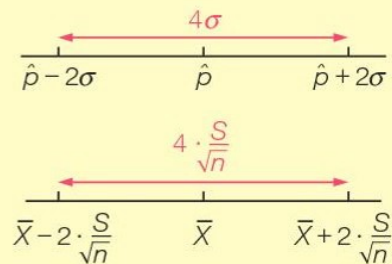
De aspecten betrouwbaarheid en nauwkeurigheid zijn tegengesteld. Meer marge geeft een breder interval en dus meer betrouwbaarheid. Minder marge geeft een smaller interval en dus meer nauwkeurigheid. De oplossing voor dit probleem zag je in opgave 53 waar grotere steekproeven nauwkeurigere resultaten opleverden, die nog steeds in 95% van de gevallen betrouwbaar zijn. Dit kun je zien aan de formule voor de breedte van een betrouwbaarheidsinterval.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval

voor de populatieproportie is $4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval

voor het populatiegemiddelde is $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.



Doordat in beide formules de steekproefomvang n in de noemer van de breuk staat, zorgt een grotere waarde van n voor een kleinere breedte van het betrouwbaarheidsinterval. De uitkomst is dan nauwkeuriger, maar nog steeds in 95% van de gevallen betrouwbaar.

Een grotere steekproef geeft een smaller 95%-betrouwbaarheidsinterval en dus meer nauwkeurigheid.

Voorbeeld

Een ondernemer overweegt een koffiezaak te openen in het centrum van 's-Hertogenbosch. Hij wil onderzoeken hoeveel koffie de klanten van koffiezaken in 's-Hertogenbosch dagelijks gemiddeld drinken. Bij de onderzoeksresultaten zal een 95%-betrouwbaarheidsinterval worden opgesteld met een maximale breedte van 50 mL. Onderzoek of minimaal 100, 200 of 300 mensen onderzocht moeten worden. Ga bij je berekening uit van $S = 205$ mL.

Aanpak

Gebruik de formule voor de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij de verschillende waarden van n om na te gaan wanneer de breedte voor het eerst kleiner dan 50 mL is.

Uitwerking

$$4 \cdot \frac{205}{\sqrt{100}} = 82 \text{ mL}, 4 \cdot \frac{205}{\sqrt{200}} \approx 58 \text{ mL en } 4 \cdot \frac{205}{\sqrt{300}} \approx 47 \text{ mL.}$$

Er moeten dus minimaal 300 mensen onderzocht worden.

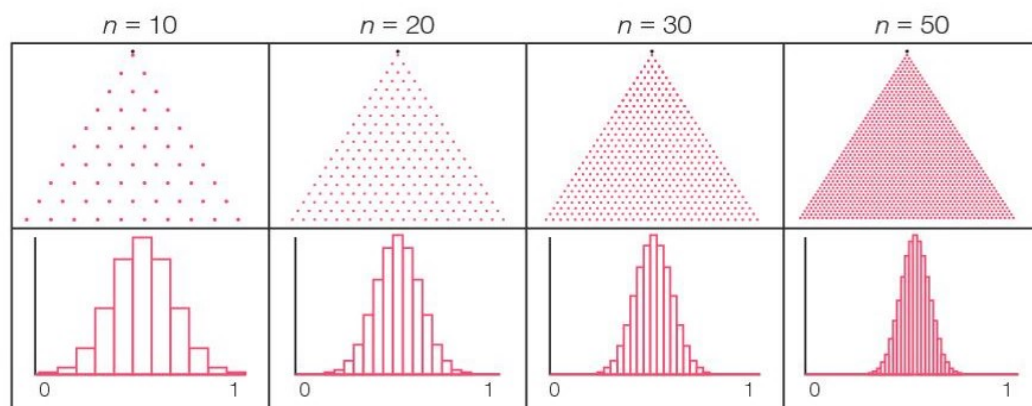
54

Een onderzoeker wil met een groot onderzoek aantonen dat een specifieke bijwerking van een medicijn in circa 15% van de gevallen optreedt. Om dit nauwkeurig te doen wil ze een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een breedte van maximaal 3%. Om tijd en kosten te besparen, wil ze niet meer proefpersonen onderzoeken dan nodig is. Ga met een berekening na of ze dan het beste gebruik kan maken van 1000, 2000, 3000 of 4000 proefpersonen.



R55

In de onderstaande figuur staan vijf histogrammen getekend bij Galtonborden met steeds meer rijen. Licht toe hoe je aan de figuur kunt zien dat bij grotere steekproeven het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie nauwkeuriger wordt.



figuur 7.34

56

Jochem doet onderzoek naar de kleur van de personenauto's die in Nederland rondrijden. Hij neemt zich voor van 900 auto's de kleur te noteren. Van de eerste 575 auto's zijn er 47 rood.

- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode auto's in Nederland op basis van de eerste 575 auto's. Welke informatie geeft het betrouwbaarheidsinterval in deze context?
- Bij de laatste 325 auto's zijn er 30 rood. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie rode auto's in Nederland op basis van de 900 onderzochte auto's.
- Is je antwoord bij vraag a betrouwbaarder dan bij vraag b? En hoe zit het met de nauwkeurigheid?

A57
  *

Van 38 meisjes en 43 jongens is bij een leeftijd van 6 maanden en 12 maanden de lengte genoteerd.
 Zie de tabel.

LENGTE KINDEREN VAN 6 EN 12 MAANDEN

		lengte in cm			
		6 maanden		12 maanden	
		$\bar{X}$	S	$\bar{X}$	S
meisjes	38	66,2	2,8	73,6	3,2
jongens	43	68,0	3,1	76,8	3,4



Bij deze tabel kunnen voor de lengte vier 95%-betrouwbaarheidsintervallen worden opgesteld.

Onderzoek welk van de vier intervallen het meest nauwkeurig is.

A58
  *

Anna onderzoekt het gemiddelde gewicht van Nederlandse huiskatten. Ze heeft van een dierenarts de gegevens van 200 huiskatten gekregen.
 In de tabel hieronder staan enkele statistieken bij de gegevens.

GEWICHT HUISKATTEN

	geslacht	
	m	v
n	91	109
$\bar{X}$	4201 gram	3215 gram
S	705 gram	620 gram



- Noem de twee variabelen die in de tabel voorkomen. Zijn de variabelen kwalitatief of kwantitatief?
- Beredeneer, dus zonder berekening, dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht bij de vrouwelijke katten minder breed is dan bij de mannelijke katten.
- Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde gewicht van de vrouwelijke huiskat. Geef je antwoord in de intervalnotatie en rond af op gehele grammen.
- Voor de mannelijke huiskatten berekende Anna het 95%-betrouwbaarheidsinterval [4053 gram, 4349 gram]. Anna besluit het interval te noteren als [4,1 kg; 4,3 kg]. Dit heeft effect op de betrouwbaarheid van het interval.
 Is de betrouwbaarheid van het nieuwe interval meer of minder dan 95%? Licht toe.

Meneer Mutsaers geeft aardrijkskunde in de bovenbouw. Hij vraagt zich af welk deel van de Nederlandse havo-bovenbouwleerlingen een ander continent hebben bezocht. Hij besluit de leerlingen op zijn school te bevragen via een online enquête. Uit zijn enquête blijkt dat van de 70 respondenten er 28 een ander continent hebben bezocht.



- a** Bereken het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Meneer Mutsaers vindt dit interval te onnauwkeurig en gaat daarom een grotere steekproef nemen. Hij wil een 95%-betrouwbaarheidsinterval met een breedte van maximaal 0,1. Hij neemt aan dat de steekproefproportie weer 0,4 zal zijn. Hij stelt daarom de vergelijking

$$4 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{n}} = 0,1 \text{ op.}$$

- b** Licht deze vergelijking toe.

De oplossing van deze vergelijking is $n = 384$.

- c** Laat dit zien.

- d** Meneer Mutsaers neemt een steekproef van 400 leerlingen en het blijkt dat 180 hiervan een ander continent hebben bezocht. Krijgt hij zo een breedte van maximaal 0,1?

Theorie D Berekenen van de steekproefomvang

In opgave 59 kreeg je de vergelijking $4 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{n}} = 0,1$. Door deze vergelijking op te lossen kun je bij het 95%-betrouwbaarheidsinterval de steekproefomvang n berekenen die nodig is om bij een proportie van 0,4 een breedte van 0,1 te krijgen.

Het oplossen van deze vergelijking mag met de GR. Je krijgt $n = 384$.

Voor een breedte van maximaal 0,1 heb je bij $\hat{p} = 0,4$ dus een steekproefomvang van minstens 384 nodig.

Om de steekproefomvang te berekenen bij de breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval los je een vergelijking op.

- Bij een proportie: $\text{breedte} = 4 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$.
- Bij een gemiddelde: $\text{breedte} = 4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Bij het oplossen met de GR gebruik je bij y_1 de formule voor de breedte en bij y_2 de vereiste breedte. Een geschikt venster stel je in door y tussen 0 en het dubbele van y_2 te kiezen. Voor x zijn de grenzen 0 en 2000 een goed uitgangspunt. Zie je geen snijpunt, verhoog dan de bovengrens van x .

Voorbeeld

Bereken de steekproefomvang als

- a de populatieproportie met 95% zekerheid in $[0,555; 0,605]$ ligt
- b het populatiegemiddelde met 95% zekerheid in $[999, 1005]$ ligt en geldt dat $S = 48$.

Uitwerking

a breedte = $0,605 - 0,555 = 0,05$ en $\hat{p} = \frac{0,555 + 0,605}{2} = 0,58$

Los op $4 \cdot \sqrt{\frac{0,58 \cdot 0,42}{n}} = 0,05$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \sqrt{\frac{0,58 \cdot 0,42}{x}}$ en $y_2 = 0,05$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 1559$, dus de steekproefomvang is 1559.

b breedte = $1005 - 999 = 6$ en $S = 48$

Los op $4 \cdot \frac{48}{\sqrt{n}} = 6$.

Voer in $y_1 = 4 \cdot \frac{48}{\sqrt{x}}$ en $y_2 = 6$.

De optie snijpunt geeft $x = 1024$, dus de steekproefomvang is 1024.

60 Bereken de steekproefomvang als



- a de populatieproportie met 95% zekerheid in $[0,34; 0,46]$ ligt
- b het populatiegemiddelde met 95% zekerheid in $[540, 590]$ ligt en geldt dat $S = 205$.

61 Bij een onderzoek onder D66 stemmers blijkt dat 55% het koningshuis wil behouden. Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval was $[0,49; 0,61]$.



Hoeveel D66 stemmers zijn ondervraagd?

62 Het gemiddeld aantal uren dat Nederlanders in de buitenlucht doorbrengen, verschilt per dag. Uit onderzoek blijkt dat op zondag het 95%-betrouwbaarheidsinterval $[3,0; 3,4]$ is, met een steekproefstandaardafwijking van 1,6 uur.



Hoe groot was de steekproefomvang bij dit onderzoek?



A63
☐◎*

Noord-Hollandse vrouwenvoeten zijn de grootste van het land, blijkt uit onderzoek uitgevoerd voor een online schoenenketen. Met een gemiddelde schoenmaat van maar liefst 39,5 is de schoenmaat van Noord-Hollandse vrouwen bijna een halve maat groter dan de gemiddelde schoenmaat van de Nederlandse vrouw. Bij de resultaten van het onderzoek staat niet vermeld wat de omvang van de steekproef was.

Onderzoek hoe groot de steekproef onder Noord-Hollandse vrouwen minimaal moet zijn geweest om met 95% zekerheid te concluderen dat de gemiddelde schoenmaat van Noord-Hollandse vrouwen 39 of hoger is. Ga uit van $S = 1,5$.



A64
◎*

Bij een Brits onderzoek door een datingwebsite voor heteroseksuelen is bekeken op welke leeftijd mensen 'de ware' ontmoeten. Bij het onderzoek bestond de steekproef uit 2000 personen waarvan een deel uit mannen en een deel uit vrouwen bestond. Het bleek dat voor mannen de gemiddelde leeftijd van ontmoeten van 'de ware' op 28 jaar lag. Met 95% zekerheid wijkt het populatiegemiddelde hier niet meer dan 6 maanden van af. Voor de groep mannen was S gelijk aan 7 jaar en 9 maanden.

Bereken welk percentage van de personen in de steekproef een man was.



E65
*

Bij een onderzoek naar de moeilijkheid van het havo wiskunde A examen zijn 850 examenkandidaten ondervraagd. Uit het onderzoek blijkt dat een groot deel van de ondervraagden het examen te moeilijk vond. De breedte van het bijhorende 95%-betrouwbaarheidsinterval was 0,05.

Bereken hoeveel van de ondervraagden het examen te moeilijk vonden.

Terugblik

Werken met betrouwbaarheidsintervallen

Er zijn twee soorten betrouwbaarheidsintervallen:

- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie.
- Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde.

Bij een kwalitatieve variabele gebruik je het betrouwbaarheidsinterval voor de proportie.

Beide soorten betrouwbaarheidsintervallen staan op het formuleblad bij het centraal examen. De notatie op het formuleblad is echter anders dan de intervalnotatie in dit boek. Hieronder zie je het deel van het formuleblad dat over betrouwbaarheidsintervallen gaat.

Bij een kwantitatieve variabele gebruik je het betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ met } p \text{ de steekproefproportie en } n \text{ de steekproefomvang.}$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ met } \bar{X} \text{ het steekproefgemiddelde, } n \text{ de steekproefomvang en } S \text{ de steekproefstandaardafwijking.}$$

Het interval $[2,8; 3,2]$ ziet er in de notatie van het formuleblad uit als

$$3 \pm 2 \cdot 0,1 \text{ oftewel } 3 \pm 0,2. \text{ Je ziet dat } \bar{X} = 3 \text{ en } \frac{S}{\sqrt{n}} = 0,1.$$

De breedte van een betrouwbaarheidsinterval

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de

populatieproportie is $4 \cdot \sigma$ met $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

De breedte van het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het

populatiegemiddelde is $4 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.

Om bij $\hat{p} = 0,3$ te berekenen voor welke n de breedte van het interval

gelijk is aan 0,08 stel je de vergelijking $4 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{n}} = 0,08$ op.

Oplossen met de GR geeft $n = 525$. Bij een steekproefomvang van 525 heeft het interval dus een breedte van 0,08.

Eindopdracht PISA Nederland

In 2015 nam Nederland weer deel aan het PISA-onderzoek dat onder andere het wiskundeniveau van 15-jarigen van verschillende landen en regio's vergelijkt. De score van Nederland op het onderdeel wiskunde viel tegen in vergelijking met het onderzoek uit 2006. Toch eindigde Nederland nog steeds in de top-20, zoals in de tabel hieronder te zien is.

rangnummer	land	95%-betrouwbaarheidsinterval
1	Singapore	561 - 567
2	Hong Kong-China	542 - 554
3	Macao-China	542 - 546
4	Chinese Taipei	536 - 548
5	Japan	527 - 538
6	B-S-J-G-China	522 - 541
7	Korea	517 - 531
8	Zwitserland	516 - 527
9	Estland	516 - 524
10	Canada	511 - 520
11	Nederland	508 - 517
12	Denemarken	507 - 515
13	Finland	507 - 516
14	Slovenië	507 - 512
15	België	502 - 512
16	Duitsland	500 - 512
17	Polen	500 - 509
18	Ierland	500 - 508
19	Noorwegen	497 - 506
20	Oostenrijk	491 - 502

- Op basis waarvan is de rangorde in de tabel tot stand gekomen?

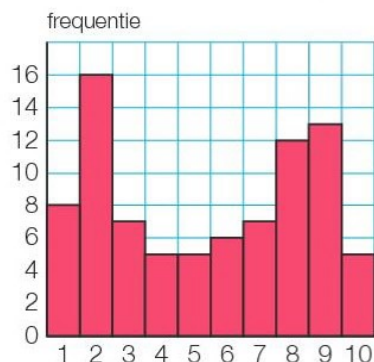
In totaal werden 5385 leerlingen in Nederland en 10 500 leerlingen in Duitsland onderzocht.

- Welke steekproefstandaardafwijking is groter, die van Duitse of Nederlandse leerlingen? Hoe groot is het verschil?
- Door de grenzen van de betrouwbaarheidsintervallen kun je niet precies zeggen op welke plek in de top-20 Nederland staat. Door rekening te houden met deze grenzen, is de hoogste mogelijke notering van Nederland een gedeelde 7^e plaats met Korea. Wat is de laagst mogelijke notering?
- Hoeveel extra leerlingen zou Nederland moeten laten onderzoeken om te zorgen dat het 95%-betrouwbaarheidsinterval van Nederland niet overlapt met dat van Polen? Neem aan dat het steekproefgemiddelde voor Nederland 512,5 blijft en de steekproefstandaardafwijking 165.

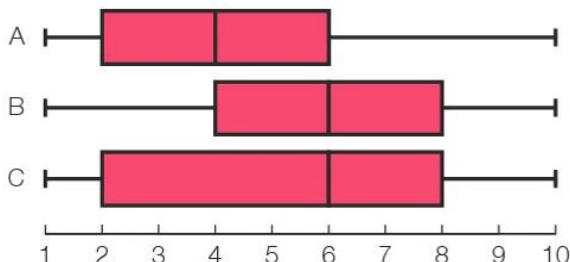
Diagnostische toets

7.1 Statistische verdelingen

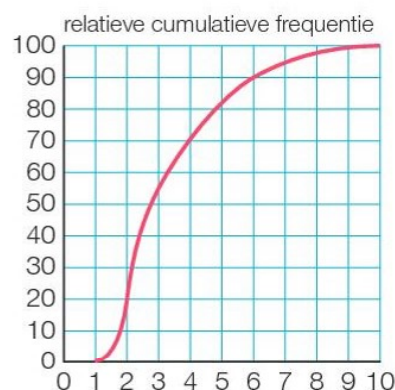
- 1** In het histogram in figuur 7.34 zijn 84 waarnemingsgetallen verwerkt. Onderzoek welke boxplot bij het histogram hoort.



figuur 7.34



- 2** Zie de relatieve verdelingskromme in figuur 7.35.
- a** Met wat voor soort verdeling heb je te maken?
 - b** Zet op volgorde van klein naar groot: mediaan, modus en gemiddelde. Licht toe.
 - c** Schets de bijbehorende verdelingskromme.



figuur 7.35

- 3** Van 4000 bananen is gegeven dat het gewicht normaal verdeeld is met een gemiddelde van 138 gram en een standaardafwijking van 19 gram.
- a** Hoeveel van deze bananen hebben een gewicht van meer dan 157 gram?
 - b** Bij een kwaliteitscontrole worden 120 van deze bananen gewogen. Hoeveel van deze bananen hebben naar verwachting een gewicht van minder dan 100 gram?

7.2 Betrouwbaarheidsintervallen voor het populatiegemiddelde

- 4** De inhoud van zakken aardappelen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 600 gram en een standaardafwijking van 30 gram. Er worden steekproeven genomen van 16 zakken en van deze zakken wordt telkens het gemiddelde gewicht in de steekproef berekend. Welk percentage van de steekproeven zal een gemiddeld gewicht van tussen 585 en 615 gram opleveren?
- 5** Voor een onderzoek naar de wachttijd bij de helpdesk van een internetprovider werden 300 gesprekken geanalyseerd. Hierbij was de gemiddelde wachttijd 3 minuten en 20 seconden. De bijbehorende standaardafwijking is 45 seconden.
- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de wachttijd bij de helpdesk van deze internetprovider in seconden nauwkeurig.
 - b** Welke informatie geeft dit interval in deze context?

7.3 Betrouwbaarheidsintervallen voor de populatieproportie

- 6** Een kwart van de Nederlandse huishoudens heeft één of meer homeopathische middelen in huis. Bij een onderzoek wordt van 75 huishoudens de proportie genoteerd met een homeopathisch middel in huis.
Bereken bij welk percentage van de mogelijke steekproeven de steekproefproportie tussen 0,2 en 0,3 zal liggen.
- 7** Bij een onderzoek onder 1500 Nederlandse huishoudens blijken er 400 homeopathische middelen in huis te hebben.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie huishoudens dat homeopathische middelen in huis heeft.

7.4 Betrouwbaarheidsintervallen toepassen

- 8** Bij een onderzoek onder 126 jongeren tussen 12 en 20 jaar bleek dat 72% van deze jongeren meer dan 8 minuten per keer doucht. Verder bleek dat deze jongeren gemiddeld 52 minuten per week douchen. De bijbehorende standaardafwijking was 14 minuten.
- a** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddeld aantal minuten douchen per week.
 - b** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie jongeren die meer dan 8 minuten per keer doucht.
- 9**
- a** Schrijf het interval $0,316 \pm 0,018$ in de intervalnotatie.
 - b** Schrijf het interval $[215, 269]$ in de $\pm$ -notatie.
 - c** Bij een onderzoek staat bij de steekproefresultaten vermeld dat $\hat{p} = 0,28$ en $n = 224$.
Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval bij deze steekproef. Schrijf het resultaat in beide notaties.
- 10** In een krant staat dat 35% van de volwassen Nederlanders last heeft van vlietschaamte. Bij vlietschaamte voel je je schuldig als je vliegt. Een onderzoeker wil controleren of dit percentage juist is. Hij wil een 95%-betrouwbaarheidsinterval opstellen met een breedte van maximaal 10%. Om dit te bereiken wil hij niet meer mensen ondervragen dan nodig is.
Onderzoek of er minimaal 200, 300 of 400 mensen ondervraagd moeten worden.
- 11** Bereken de steekproefomvang als
- a** het populatiegemiddelde met 95% zekerheid in $[268, 272]$ ligt en geldt dat $S = 45$
 - b** de populatieproportie met 95% zekerheid in $[0,372; 0,418]$ ligt.